Ejercicio	1	2	3	4	5	6	7	8	total
Puntos									

Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía   Examen final de Matemáticas I   29 de enero de 2008

SOLUCIÓN

APELLIDOS:		**NOMBRE:**
DNI:	**Titulación:**	**Grupo:**

MODELO 1:

1. **Dada la función** $g(x) = -2 + \sqrt{x+4}$. **Se pide:**

a) Determinar el dominio y la imagen de g.

b) Representar la gráfica de g, utilizando la gráfica de $\sqrt{x}$ y el apartado anterior.

c) Hallar la inversa de $g(x)$ y dibujarla.

1'5 puntos

a) Dominio (g) $=\{x : 0 \le x+4\} = [-4,\infty)$

Imagen (g) $= [-2,\infty)$, pues $\min(g) = g(-4) = -2$ y, obviamente, $g(x)$ es continua y creciente.

.

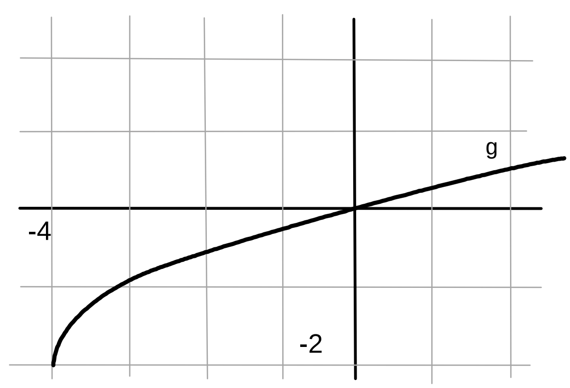
b) La gráfica de g se obtiene aplicando, en primer lugar, una traslación de 4 unidades a la izquierda a

la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$, a fin de obtener $f_1(x) = \sqrt{x}$ y, posteriormente, una traslación de 2 unidades

hacia abajo, a fin de obtener $f_2(x) = -2 + f_1(x) = g(x)$.

Por supuesto, se puede proceder en el orden que se prefiera.

La gráfica de g, por tanto, es aproximadamente así:

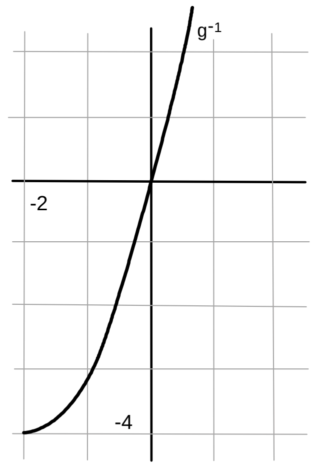


c) Llamemos $g^{-1}(x) = y$. Entonces se cumple que $x = g(g^{-1}(x) = g(y) = -2 + \sqrt{y+4}$. Por lo tanto,

$x + 2 = \sqrt{y+4} \Rightarrow (x+2)^2 = y + 4 \Rightarrow (x+2)^2 - 4 = y.$

Luego $g^{-1}(x) = (x+2)^2 - 4 = x^2 + 4x$ y se cumple que $Dom(g^{-1})$= Imagen (g) = $[-2,\infty)$.

La gráfica de g^{-1}, simétrica de la gráfica de g respecto a la diagonal principal es, por tanto, aproximadamente así:



2. **Sea la función** $f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{x}}$**. Se pide:**

a) Hallar los intervalos de crecimiento / decrecimiento de f, así como sus extremos locales y/o globales.

b) Hallar los intervalos de concavidad / convexidad de f, así como sus puntos de inflexión.

c) Hallar, si existen, las asíntotas de esta función, y representarla.
Sugerencia: una de las asíntotas de $f(x)$ puede ser complicada.
1'5 puntos

---

a) En primer lugar, hay que observar que la función está bien definida si $x \neq 0$.

Y, como $f'(x) = 2xe^{-\frac{1}{x}} + x^2 e^{-\frac{1}{x}}.\frac{1}{x^2} = (2x+1)e^{-\frac{1}{x}}$, se deduce que:

i) $f'(x) = (2x+1)e^{-\frac{1}{x}} > 0 \Leftrightarrow 2x+1 > 0, x \neq 0$; luego f es creciente en $(\frac{-1}{2}, 0)$ y en $(0, \infty)$.

ii) $f'(x) = (2x+1)e^{-\frac{1}{x}} < 0 \Leftrightarrow 2x+1 < 0$; luego f es decreciente en $(-\infty, \frac{-1}{2})$.

Por lo tanto, f tiene un mínimo local en $x = \frac{-1}{2}$, donde $f(\frac{-1}{2}) = \frac{1}{4}e^2$.

Ahora bien, dicho extremo no es global pues, como se verá en el apartado c), $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$

.

b) Como $f''(x) = 2e^{-\frac{1}{x}} + (2x+1)e^{-\frac{1}{x}}.\frac{1}{x^2} = (\frac{2x^2+2x+1}{x^2})e^{-\frac{1}{x}} > 0$ si $x \epsilon Dom(f)$

Entonces f es convexa en $(-\infty, 0)$ y en $(0, \infty)$. No tiene, por tanto, nibgún punto de inflexión.

.

c) La función solo puede tener, quizás, una asíntota vertical en x=0, pues en el resto de los puntos es continua.

Ahora bien, como $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 e^{-\frac{1}{x}} = 0.e^{-\infty} = 0 \Rightarrow f$ no presenta asíntota vertical por la derecha.

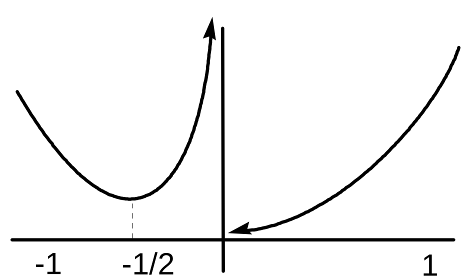
Y como $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{\infty}{\infty} =$ (aplicando L'Hopital) $= \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{-2}{x3}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{-2}{x}} = \frac{\infty}{\infty} =$

$=(\textit{aplicando L'Hopital}) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{2}{x2}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{2} = e^{\infty} = \infty \Rightarrow f$ presenta asíntota vertical por la izquierda.

Por otro lado, como $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^2 e^{-\frac{1}{x}} = \infty.1 = \infty \Rightarrow f$ no tiene asíntotas horizontales.

Y como $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{e^{\frac{1}{x}}} = \frac{\pm\infty}{e^0} = \pm\infty \Rightarrow f$ no tiene asíntotas oblicuas.

Por lo tanto, la gráfica de f es, aproximadamente, así:



3. **Sean a, B, c > 0 y consideremos la función definida por** $f(x) = \begin{cases} e^{ax} & si \quad x < 0 \\ B & si \ x = 0 \\ e^{cx} & si \quad x > 0 \end{cases}$

a) Estudiar, según los valores $a, B, c,$ la derivabilidad de f en $x = 0$.

b) Dada la función $F(x) = \int_{-2x}^{x^2} f(t)dt,$ calcular $F'(1)$.

Sugerencia para b): no es necesaria la derivabilidad de $f(x)$ ni calcular explícitamente $F(x)$.

1 punto

a) En primer lugar, f debe ser continua para ser derivable. Ahora bien, como $\lim_{x\to 0} f(x) = e^0 = 1,$ para cualesquiera valores $a, c \Rightarrow f(x)$ es continua si y solo si $B = 1$.

Y ahora, suponiendo que $f(x)$ es continua, $f(x)$ es derivable si y solo si:

$D_{-}f(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = a = c = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = D_{+}f(0)$

Por tanto, f es derivable en $x = 0 \Leftrightarrow B = 1, a = c$.

.

b) Como $F'(x) = -f(-2x).(-2) + f(x^2).2x,$ se deduce que

$F'(1) = -f(-2).(-2) + f(1).2 = 2e^{-2a} + 2e^c$.

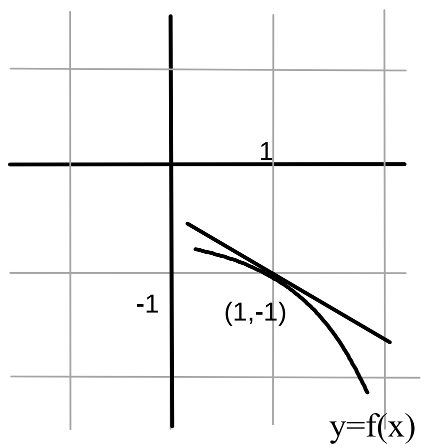
4. **Sea** $y = f(x)$ **la función definida de manera implícita mediante la ecuación** $e^{x+y} + y = 0$ **en un entorno del punto** $(1,-1)$**. Se pide:**

a) Hallar, mediante $f'(1)$, la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(1,-1)$ y calcular aproximadamente, utilizando la ecuación de dicha recta tangente, $f(0'9)$.

b) Discutir, mediante $f''(1)$, la concavidad o convexidad de f cerca del punto $a = 1$ y dibujar aproximadamente la gráfica de f cerca del punto $(1,-1)$.

1 punto

a) Derivando la ecuación, obtenemos que $e^{x+y}(1+y') + y' = 0$, por lo cual, sustituyendo $x = 1, y = -1$, se deduce que $1 + 2y' = 0 \Rightarrow y' = f'(1) = -\frac{1}{2}$.
Por lo tanto la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(1,-1)$ tiene como ecuación:
$y-(-1) = (-\frac{1}{2})(x-1)$, o bien: $y = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2}$.
Luego $f(0'9) \approx -\frac{0'9}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{1'9}{2} = -0'95$.
.
b) Derivando la ecuación, $e^{x+y}(1+y') + y' = 0$, obtenemos que
$e^{x+y}(1+y')^2 + e^{x+y}.y'' + y'' = 0$, por lo cual, sustituyendo $x = 1, y = -1, y' = -\frac{1}{2}$ se deduce que $\frac{1}{4} + 2y'' = 0 \Rightarrow y'' = f''(1) = -\frac{1}{8}$, de lo que se deduce que f es cóncava cerca del punto $(1,-1)$.
Por lo tanto, la gráfica de f cerca del punto $(1,-1)$ será, aproximadamente, así:



5.

a) Enunciar el teorema de Rolle.

b) Demostrar razonadamente que la función $f(x) = \frac{1}{x + \sqrt{4 - x^2}}$ cumple las hipótesis del citado teorema, en el intervalo $[0, 2]$.

c) Hallar, para la función del apartado anterior, el punto que cumple con la tesis del teorema.

1,5 puntos

---

a) ...

b) $f(x)$ es continua en el intervalo $[0, 2]$, pues el denominador es una función continua, formada por dos sumandos positivos que solo se anulan cuando $x = 0$ y $x = 2$, respectivamente, luego no se anulan simultáneamente.

$f(x)$ es derivable en el intervalo $(0, 2)$, pues la función $\sqrt{4 - x^2}$ es derivable en el intervalo $(-2, 2)$.

Finalmente, $f(0) = \frac{1}{0+2} = \frac{1}{2+0} = f(2)$.

Por lo tanto, f cumple las hipótesis del citado teorema en el intervalo $[0, 2]$.

.

c) La tesis del teorema es que existe un punto c en el intervalo $(0, 2)$ donde la derivada se anula. Así pues,

$f'(x) = -(1 + \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}) /(x + \sqrt{4 - x^2})^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 = \frac{2x}{2\sqrt{4-x^2}} \Leftrightarrow \sqrt{4 - x^2} = x \Leftrightarrow 4 - x^2 = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$

Por tanto, el punto $x = \sqrt{2}$ es el único que cumple la tesis del teorema.

6. **Sea** $C(x) = 8 + x + \frac{1}{2}x^2$ **la función de costes de una empresa monopolista, donde x** $\geqslant 0$ **es el número de unidades producidas de cierta mercancía, y cuya función inversa de demanda (o precio por unidad) es** $p(x) = \dfrac{64}{1+x}$**. Se pide:**

a) Probar que la función de beneficios es cóncava y, a partir de ahí, determinar la cantidad x que maximiza el beneficio.

b) Probar que la función de coste medio es convexa en $(0, \infty)$ y, a partir de ahí, determinar la cantidad x que minimiza el coste medio (o por unidad).

c) Supóngase ahora que, debido a determinadas restricciones legales, $a > 0$ representa la producción máxima de dicha empresa; es decir, $0 \leq x \leq a$. Discutir, según los valores de a, la producción que llevará a cabo esta empresa cuando se plantee: i) maximizar beneficios; o bien: ii) minimizar costes medios.

1'5 puntos

---

a) La función de beneficios es $B(x) = 64\frac{x}{1+x} - (8 + x + \frac{1}{2}x^2)$. De esta forma calculamos $B'(x) = 64\frac{1}{(1+x)^2} - (1 + x)$ y $B''(x) = -128\frac{1}{(1+x)^3} - 1 < 0$ para todo $x \geq 0$, luego B es concava. Además, como el único punto crítico es $B'(x) = 64\frac{1}{(1+x)^2} - (1 + x) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 64 = (1 + x)^3 \Leftrightarrow 1 + x = 4.$
Por lo tanto, la cantidad $x = 3$ es el único maximizador global del beneficio.

.

b) La función de coste medio es $C_m(x) = 8x^{-1} + 1 + \frac{1}{2}x.$ De esta forma calculamos $C_m'(x) = -8x^{-2} + \frac{1}{2}$ y $C_m''(x) = 16x^{-3} > 0$ para todo $x > 0$, Luego $C_m(x)$ es convexa. Además, como el único punto crítico es $C_m'(x) = -8x^{-2} + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow$
$16 = x^2 \Leftrightarrow x = 4,$ se deduce que $x = 4$ es el único minimizador global del coste medio.

.

c) Como hemos visto en la parte a), $B(x)$ es creciente en $[0, 3)$ y decreciente en $(3, \infty)$.
Como hemos visto en la parte a), $C_m(x)$ es decreciente en $(0, 4)$ y creciente en $(4, \infty)$.
Por lo tanto,
i) si la empresa se plantea maximizar beneficios, debemos distinguir dos casos:
$a \geqslant 3 \Rightarrow B(x)$ alcanza su máximo en $x = 3$.
$a \leq 3 \Rightarrow B(x)$ alcanza su máximo en $x = a$.
ii) si la empresa se plantea minimizar costes medios, debemos distinguir dos casos:
$a \geqslant 4 \Rightarrow C_m(x)$ alcanza su mínimo en $x = 4$.
$a \leq 4 \Rightarrow B(x)$ alcanza su mínimo en $x = a$.

7. **Dada** $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$**, se pide:**

a) Estudiar el crecimiento / decrecimiento, y la concavidad / convexidad de cualquier primitiva de f, así como la posible existencia de extremos y de puntos de inflexión.

b) Hallar $F(x)$ la primitiva de $f(x)$ que cumple $F(0) = 0$.

Sugerencia: no es necesario conocer la expresión de $F(x)$ para el apartado a).

1 punto

---

a) Sea $F(x)$ una primitiva cualquiera de $f(x)$. Como $F'(x) = f(x)$, se cumple que:

i) $F'(x) = f(x) = \frac{e^x}{1+e^x} > 0 \Rightarrow F(x)$ es creciente en $\mathbb{R}$. En particular, $F(x)$ no tiene extremos.

ii) $F''(x) = \frac{e^x(1+e^x)-e^{2x}}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0 \Rightarrow F(x)$ es convexa en $\mathbb{R}$. En particular, $F(x)$ no tiene puntos de inflexión.

.

b) Como $(1+e^x)' = e^x$, llamando $u = 1+e^x$ se cumple:

$\int \frac{e^x}{1+e^x}dx = \int \frac{u'}{u}dx = \ln(u) + C = \ln(1+e^x) + C$.

Y ahora, como $F(0) = 0, C$ ha de cumplir lo siguiente:

$F(0) = \ln(1+e^0) + C = 0 \Rightarrow C = -\ln 2$.

Así pues, $F(x) = \ln(1+e^x) - \ln 2$.

8. **Sea** $A = \{(x,y) : x^2 + x \leq y \leq x + 9\}$. **Consideramos en** $\mathbb{R}^2$ **el orden de Pareto definido por** $(x_0,y_0) \leq_P (x_1,y_1) \Leftrightarrow x_0 \leq x_1,\ y_0 \leq y_1$. **Se pide**:

a) Representar gráficamente el conjunto A y hallar los puntos maximales y minimales, así como el máximo y el mínimo del conjunto A, si existen.

b) Calcular el área de dicho conjunto.

1 punto

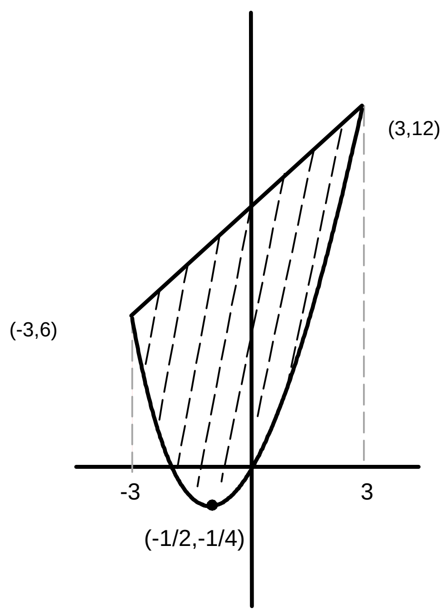
a) La parábola $y = x^2 + x$ y la recta $y = x + 9$ se cortan en los puntos $x = -3, x = 3,$ pues $x^2 + x = x + 9 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$.

Por tanto, los puntos de corte son $(-3,6), (3,12)$.

Por otro lado, la parábola tiene un mínimo en $(x^2 + x)' = 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$, es decir, en el punto $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$.

Y, como $y = x^2 + x$ es una parábola convexa, la recta $y = x + 9$ debe quedar por encima de la parábola entre los puntos -3 y 3.

Por lo tanto, el conjunto será de la siguiente forma:



A partir del dibujo se deduce que:

i) maximales (A)=máximo(A)=(3,12).

ii) minimales (A)=$\{(x,y) : -3 \leq x \leq -\frac{1}{2}, y = x^2 + x\}$. No existe mínimo.

.

b) Como ya hemos hallado los puntos de corte y la posición relativa de las funciones, entonces Área(A)=$\int_{-3}^{3}(x + 9 - (x^2 + x))dx = \int_{-3}^{3}(9 - x^2)dx =$ (y ahora, como $9 - x^2$ es una función par)=

=$2\int_{0}^{3}(9 - x^2)dx = 2[9x - \frac{x^3}{3}]_0^3 = 2(27 - 9) = 36$.