Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía   Examen final de Matemáticas I   31 de enero de 2006

APELLIDOS:		**NOMBRE:**
DNI:	**Titulación:**	**Grupo:**

MODELO 1:

1. **Sea** $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq y \leq 6 - x^2\right\}$. **Se pide:**

a) Representar el conjunto A.

b) Consideramos en $\mathbb{R}^2$ el orden de Pareto definido por $(x_0,y_0) \leq_P (x_1,y_1) \Leftrightarrow x_0 \leq x_1,\ y_0 \leq y_1$.
Hallar el conjunto de puntos maximales y minimales, máximo y mínimo de A, si los hay.

c) Calcular el área de dicho conjunto.

1,5 puntos

a) Si x $\geq$ 0, (x,y) $\in$ A $\Leftrightarrow x \leq y \leq 6 - x^2$, donde x $\in$ [0,2], pues $0 \leq x \leq 6 - x^2$ equivale a x$\in [0,2]$;

y, si x $\leq$ 0, (x,y) $\in$ A $\Leftrightarrow -x \leq y \leq 6 - x^2$, donde x $\in$ [-2,0], pues $0 \leq -x \leq 6 - x^2$ equivale a x$\in [-2,0]$.

Así pues, teniendo en cuenta que los puntos de corte de la parábola $y = 6 - x^2$ con las rectas $y = -x, y = x$ son los puntos $(-2,2),(2,2)$, el conjunto A es, aproximadamente, el siguiente:

.

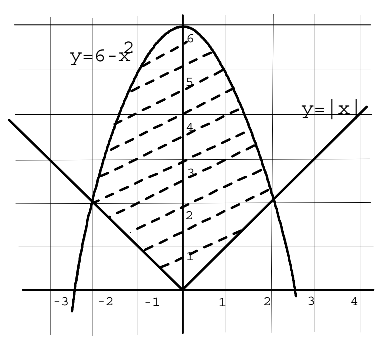
b) Maximales $(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,2],\ y = 6 - x^2\}$, luego no existe máximo de A.

Minimales $(A) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-2,0],\ y = -x\}$, luego no existe mínimo de A.

.

c) Como la figura es simétrica respecto del eje vertical, el área vale el doble de la figura contenida en el primer cuadrante; por tanto:

área (A)=2$\int_0^2 (6 - x^2 - x)dx = 2[6x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}]_0^2 = 2[12 - \frac{8}{3} - \frac{4}{2}] = \frac{44}{3}$



2. **Dada la función** $f(x) = \sqrt{-x^2+2x+3}$. **Se pide:**

a) Determinar el dominio y la imagen de f.

b) Dibujar (esquemáticamente) las gráficas de $f(x)$, $g(x) = f(x)+1$ y $h(x) = f(x+1)$.
Sugerencia: calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f; la convexidad es superflua.

1 punto

---

a) Dominio(f) $= \{x : -x^2+2x+3 \geq 0\} = \{x : x^2-2x-3 = (x-3)(x+1) \leq 0\} = [-1,3]$

Por otra parte, el radicando de la función f es una parábola invertida, cuyo máximo se alcanza en el punto $x = 1$, que es donde se anula la derivada de $-x^2+2x+3$;

por lo tanto, el máximo vale $\sqrt{-1+2+3} = 2$. Obviamente, el mínimo de $f(x)$ vale 0.

Luego se deduce que Imagen(f) $= [0,2]$.

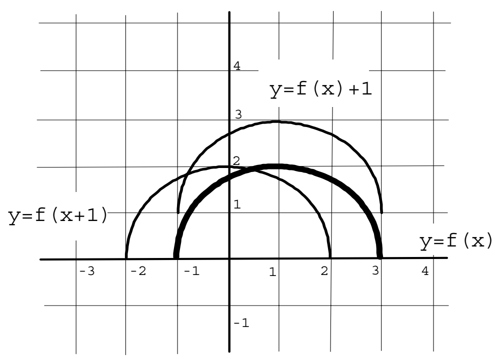
.

b) $f(-1) = 0$, f es creciente en $[-1,1]$, $f(1) = 2$, f es decreciente en $[1,3]$, $f(3) = 0$.

Por tanto la gráfica de f es, aproximadamente la gráfica dibujada en negrita que figura a continuación.

Por otro lado, como g es la traslación, una unidad hacia arriba de la gráfica de f, la gráfica de g es, aproximadamente la gráfica que figura a encima de la gráfica de f.

Por último, como h es la traslación, una unidad hacia la izquierda de la gráfica de f, la gráfica de h es, aproximadamente la gráfica que figura a la izquierda de la gráfica de f.



3. **Dada la función definida por** $f(x) = \begin{cases} 7\ln(-x) & si\ x < -1 \\ x^2 - 5x - 6 & si\ \ -1 \le x \le 1 \\ e^{x+1} & x > 1 \end{cases}$

a) Estudiar la continuidad de f.
b) Estudiar la derivabilidad de f.
1 punto

a) Obviamente, f es continua si $x \neq -1, x \neq 1$.
$f(-1) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = 0,$ luego f es continua en -1 por la derecha. Además, como $\lim_{x\to -1^-} f(x) = 7\ln 1 = 0$, f también es continua en -1 por la izquierda.
Luego f es continua en $x = -1$.
Análogamente, f es continua en 1 por la izquierda, pues $f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = -10$.
Sin embargo, como $\lim_{x\to 1^+} f(x) = e^{x+1} = e^2$, f no es continua en 1 por la derecha.
Luego f no es continua en $x = 1$.
.
b) Como f no es continua en 1, f no será derivable en dicho punto. Por otra parte:
$D_+f(-1) = 2(-1) - 5 = -7$. Y, como f es continua en el punto -1,
$D_-f(-1) = \lim_{x\to -1^-} f'(x) = \lim_{x\to -1^-} 7\frac{(-1)}{-x} = -7$, luego f es derivable en el punto -1.

4. **Sea** $y = f(x)$ **la función definida de forma implícita mediante la ecuación** $x + y^3 = x^3 + y$**,** **en un entorno del punto** $(-1, 1)$**.**

a) Calcular, mediante $f'(-1)$, la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(-1, 1)$.

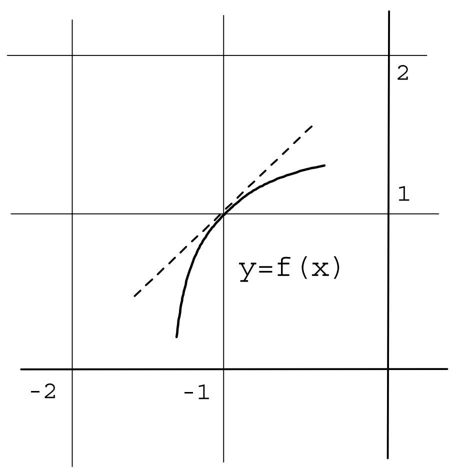
b) Deducir, mediante $f''(-1)$, la convexidad o la concavidad de f en un entorno del punto $(-1, 1)$

c) Dibujar aproximadamente la gráfica de f en un entorno del punto $(-1, 1)$.
Sugerencia para c): es suficiente suponer que $f'(-1) > 0$, $f''(-1) < 0$.

1,5 puntos

---

a) Derivando la ecuación, obtenemos que:
$1 + 3y^2y' = 3x^2 + y'$, luego sustituyendo x por -1, y por 1, se deduce que:
$1 + 3y' = 3 + y' \Leftrightarrow y' = 1$.
Así pues, la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en un entorno del punto $(-1, 1)$ es:
$y - 1 = x + 1 \Leftrightarrow y = x + 2$.
.
b) Derivando la primera ecuación del apartado a), se obtiene que:
$6y(y')^2 + 3y^2y'' = 6x + y''$, luego sustituyendo x por -1, y por 1, y' por 1, se deduce que:
$6 + 3y'' = -6 + y'' \Leftrightarrow y'' = -6$, luego f es cóncava en un entorno del punto $(-1, 1)$.
.
c) Por tanto, la gráfica de f es, aproximadamente, como sigue:



5.

a) Enunciar el teorema del valor medio para funciones derivables.

b) Considérense las funciones $f(x) = \sqrt{x+1}$, $g(x) = \ln(x+1)$. Discutir si alguna de estas funciones satisface las hipótesis del teorema en el intervalo $[-1, 1]$.

c) Para aquellas funciones que cumplan las hipótesis del teorema, hallar el valor c donde se satisface la conclusión del teorema.

1,5 puntos

---

a) Si una función $h(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b), existe $c \in (a, b)$ de forma que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

.

b) La función $f(x)$, obviamente, cumple el enunciado del teorema, pues es continua en el intervalo $[-1, 1]$ y derivable en el intervalo $(-1, 1)$.

La función $g(x)$, obviamente, no cumple el enunciado del teorema, pues no es continua en $x = -1$.

.

c) Como f satisface las hipótesis del teorema, existirá un punto $c \in (-1, 1)$ que cumpla:

$f(1) - f(-1) = f'(c)(1 - (-1)) \iff$

$\iff \sqrt{2} - \sqrt{0} = \frac{1}{2\sqrt{c+1}}.2 \iff \sqrt{c+1} = \sqrt{\frac{1}{2}} \iff c + 1 = \frac{1}{2} \iff c = -\frac{1}{2}.$

6. **Sea** $C(x) = 100 + ax + 0,4x^3$ **la función de costes de una empresa monopolista. Se pide:**

a) Discutir, según los valores de a la concavidad / convexidad de la función de coste medio.

b) Hallar la producción x que minimiza el coste medio y obtener el valor de dicho coste medio mínimo.

1 punto

---

a) $Costes\ medios(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{100}{x} + a + 0'4x^2$;
pues bien, esta función es convexa para todo a, ya que:
$(\frac{C(x)}{x})'' = (-\frac{100}{x^2} + 0'8x)' = \frac{200}{x^3} + 0'8 > 0$ si $x > 0$.

b) Como la función es convexa, el valor que iguala la derivada a 0 es el minimizador.
Por lo tanto:
$(\frac{C(x)}{x})' = 0 \Leftrightarrow -\frac{100}{x^2} + 0'8x = 0 \Leftrightarrow 0'8x^3 = 100 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{100/0'8} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{1000/8} = \frac{10}{2} = 5$
Además, $\frac{C(5)}{5} = 20 + a + (0'4)25 = 30 + a$

7. **Dada** $f(x) = (x^2 + 4x + 5)\, e^{-x}$, **se pide:**

a) Estudiar los puntos de corte con los ejes, el crecimiento / decrecimiento y los extremos locales y globales de f.

b) Estudiar los intervalos de concavidad / convexidad de f, así como hallar los puntos de inflexión.

c) Hallar las asíntotas y representar la función.

1'5 puntos

---

a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 5 = 0 \Leftrightarrow$ para ningún x, pues el discriminante de esta ecuación es negativo; por lo tanto, la gráfica de la función no corta al eje horizontal.

Sí corta al eje vertical en $(0, 5)$.

Y como $f'(x) = (2x + 4)e^{-x} + (x^2 + 4x + 5)(-1)e^{-x} = (-x^2 - 2x - 1)e^{-x} = -(x + 1)^2 e^{-x} < 0$ si $x \neq -1$, $f'(-1) = 0$, se deduce que f es decreciente en toda la recta real.

Por lo tanto, f no posee extremos locales ni globales.

.

b) $f''(x) = -2(x + 1)e^{-x} + (x + 1)^2 e^{-x} = (x + 1)(x - 1)e^{-x}$. Por lo tanto:

f es convexa en $(-\infty, -1]$ y en $[1, \infty)$. f es cóncava en $[-1, 1]$.

Así pues, f tiene puntos de inflexión: $-1, 1$.

.

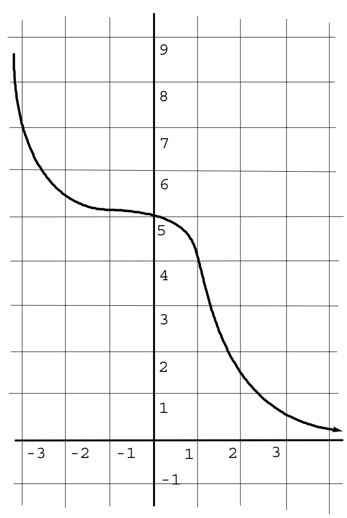
c) $\lim\limits_{x\to\infty} (x^2 + 4x + 5)\, e^{-x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+4x+5}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} =$ (aplicando L'Hopital dos veces)$=\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0$

luego $y = 0$ es la asíntota horizontal de f en ∞.

Por otro lado, f no posee asíntota ni horizontal ni oblicua en $-\infty$, pues $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2 + 4x + 5)\, e^{-x}/x = \lim\limits_{x\to-\infty} (x + 4 + \frac{5}{x})\, e^{-x} = -\infty$.

Finalmente, f no posee ninguna asíntota vertical pues es continua en toda la recta real.

Resumiendo, la gráfica de f es, aproximadamente, la siguiente:



8. **Dada la función** $F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\,dt$. **Se pide**:

a) Estudiar los puntos de corte con los ejes, el crecimiento / decrecimiento y los extremos locales y globales de F, utilizando la derivada de $F(x)$.

b) Hallar el valor exacto de $F(e)$, utilizando la primitiva de $f(t) = \frac{\ln t}{t^2}$.

1 punto

---

a) Obviamente, la función $F(x)$ solo está definida para valores positivos, luego no puede tener un punto de corte con el eje vertical.

Por otra parte $(1, 0)$ es, obviamente, un punto de corte con el eje horizontal.

Es único sin más que comprobar que $F(x)$ es creciente en $[1, \infty)$ y decreciente en $(0, 1]$, pues $F'(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, es positiva en $(1, \infty)$ y negativa en $(0, 1)$.

Por otra parte, y por lo anterior, $x = 1$ será el único minimizador local y global.

.

b) Hay muchas formas de hallar la primitiva. Por ejemplo:

$$\int t^{-2} \ln t\,dt = \text{(por partes)} \ = (-1)t^{-1} \ln t - \int (-1)t^{-1} \frac{1}{t}\,dt = -\frac{\ln t}{t} + \int t^{-2}\,dt = -\frac{\ln t}{t} - t^{-1} + C$$

De esta forma, para alguna C se cumple que:

$$F(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\,dt = -\frac{\ln x}{x} - x^{-1} + C;$$ y, como $F(1) = 0 = -1 + C \Rightarrow C = 1$.

Por lo tanto, $F(e) = \int_1^e \frac{\ln t}{t^2}\,dt = -\frac{\ln e}{e} - e^{-1} + 1 = 1 - \frac{2}{e}$