Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía   Examen final de Matemáticas I   3 de febrero de 2005

APELLIDOS:		**NOMBRE:**
DNI:	**Titulación:**	**Grupo:**

MODELO 1:

1. **Considera la función** $f(x) = \ln(|x|+1) - 1$. **Se pide:**
a) Determinar el dominio y la imagen de f.
b) Representar la gráfica de f. Sugerencia: recordar que $\ln e = 1$, donde $e = 2'7\ldots$

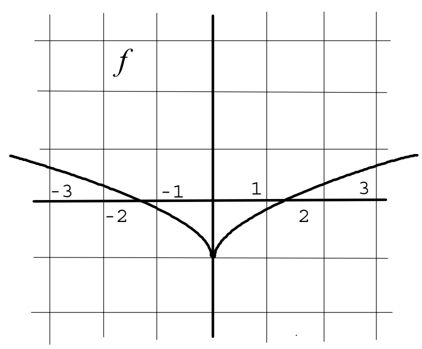
1 punto

a) Dominio(f) = $(-\infty, \infty)$ pues, como $|x|+1 > 0$ siempre, $\ln(|x|+1)$ está bien definido para cualquier x.

Por otra parte, como $f(x)$ es una función par, imagen$(f : \mathbb{R} \to \mathbb{R})$ = imagen$(f : [0,\infty) \to \mathbb{R})$; y, como en el intervalo $[0,\infty)$

$f(x) = \ln(x+1) - 1$ es una función creciente , y $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, se deduce que imagen$(f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}) = [f(0), \infty) = [-1, \infty)$.

b) Como $f(x)$ es una función par que cumple $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, se deduce que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$. Además, como $f(x)$ es creciente en el intervalo $[0,\infty)$, $f(x)$ será decreciente en el intervalo $(-\infty, 0]$. Por último, como $f(x)$ es una función continua, la gráfica de esta función será, aproximadamente, así:



2. **Dada la función** $f(x) = 4xe^{-x/2} + 1$**, se pide:**

a) Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y/o mínimos de la función $f(x)$.

b) Calcular los intervalos de concavidad y convexidad, así como los puntos de inflexión, de $f(x)$.

c) Calcular las asíntotas y representar la gráfica de $f(x)$.

1,5 puntos

---

a) En primer lugar, f es continua en toda la recta real. Si calculamos la derivada de f, obtenemos:

$f'(x) = 4[e^{-x/2} + xe^{-x/2}(-1/2)] = 4e^{-x/2}(1 - x/2) = 2e^{-x/2}(2 - x)$. Luego se deduce que:

f creciente en $(-\infty, 2)$, puesto que $f'(x) > 0$.

f decreciente en $(2, \infty)$, puesto que $f'(x) < 0$.

f alcanza un máximo local y global en el punto x = 2.

b) Para ello, calculamos la derivada segunda de f.

$f''(x) = 2[e^{-x/2}(-1/2)(2 - x) + e^{-x/2}(-1)] = 2e^{-x/2}[-1 + \frac{x}{2} - 1] = e^{-x/2}(x - 4)$. Por lo tanto, se deduce que

f cóncava en $(-\infty, 4)$, puesto que $f''(x) < 0$.

f convexa en $(4, \infty)$, puesto que $f''(x) > 0$.

f alcanza un punto de inflexión en x = 4.

c) Como f es continua, no tiene asíntotas verticales. Veamos si tiene asíntotas horizontales:

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 4xe^{-x/2} + 1 = (-\infty).(\infty) + 1 = -\infty.$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} 4xe^{-x/2} + 1 = 1 + 4 \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{x/2}} = (aplicando - L'Hopital) = 1 + 4 \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{x/2}/2} =$

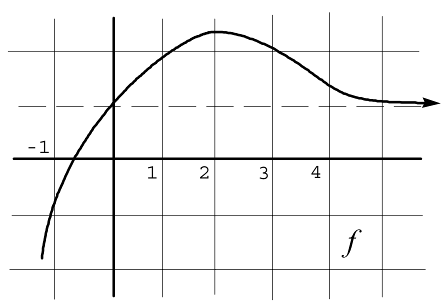
$= 1 + 4.\frac{1}{\infty} = 1$

Luego f posee la asíntota horizontal y=1 en ∞ y no posee ninguna asíntota horizontal en $-\infty$.

Por otra parte, veamos si existe asíntota oblícua en $-\infty$. Para ello,

$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} (4e^{-x/2} + \frac{1}{x}) = \infty$; por tanto, no existe ninguna asíntota oblícua de f.

Por tanto, la gráfica de f es, aproximadamente la siguiente:



3. **Dada la función** $y = f(x)$ **definida implícitamente, cerca del punto** $x = 1, \quad y = 1$ **por la ecuación** $x^2y + xy^2 = 2,$ **se pide:**

a) Hallar la ecuación de la recta tangente a gráfica de $f(x)$ en $x = 1$.

b) Dibujar aproximadamente la gráfica de la función $f(x)$ cerca del punto x=1. Sugerencia: si no se sabe hallar $f''(1)$, basta con suponer que $f''(1) > 0$.

1 punto

---

a) En primer lugar, derivamos la ecuación que define a f de forma implícita, y obtenemos:

$2xy + x^2y' + y^2 + 2xyy' = 0.$ Y ahora, sustituyendo en el punto $x = 1, \quad y = 1,$ la ecuación queda en:

$2 + y' + 1 + 2y' = 0,$ es decir, y'=-1. Por tanto, la ecuación de la recta tangente será:

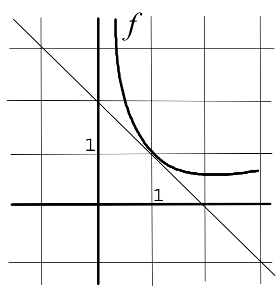
$y - 1 = (-1).(x - 1) \Leftrightarrow x + y = 2.$

b) Derivando la ecuación $2xy + x^2y' + y^2 + 2xyy' = 0$, obtenemos lo siguiente:

$2y + 2xy' + 2xy' + x^2y'' + 2yy' + 2yy' + 2x(y')^2 + 2xyy'' = 0.$ Y ahora, sustituyendo $x = 1, y = 1, y' = -1,$ se obtiene:

$2 - 2 - 2 + y'' - 2 - 2 + 2 + 2y'' = 0 \Leftrightarrow -4 + 3y'' = 0 \Leftrightarrow y'' = \frac{4}{3}.$

Por lo tanto, podemos deducir que, cerca del punto x = 1, la función es convexa, de modo que la gráfica de f queda por encima de la recta tangente x + y = 2. De esta forma, la gráfica de f cerca del punto x = 1 es, aproximadamente, así:



4. **Sea $f(x)$ una función definida en el intervalo $[-1,1]$. Se pide:**
a) Enunciar el teorema del valor medio correspondiente a $f(x)$.
b) Considerar si la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ satisface la hipótesis de dicho teorema y, caso de no hacerlo, si satisface la conclusión.
1 punto

---

a) Si $f(x)$ es contínua en [-1,1] y derivable en (-1, 1), existe al menos un punto c en el intervalo $(-1,1)$ que cumple:

$f(1) - f(-1) = f'(c).(1-(-1))$.

b) La función no satisface la hipótesis, pues f' no está definida en x = 0, ya que $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ la cual, obviamente, no está bien definida en el punto 0. Sin embargo, sí se satisface la conclusión pues existen dos puntos c en el intervalo $(-1,1)$ que cumplen:

$f(1) - f(-1) = f'(c).(1-(-1))$, pues esto equivale a $2 = f'(c).2$, y esto equivale a $f'(c) = 1$, para algún c en el intervalo $(-1,1)$.

Obviamente, $f'(c) = \frac{1}{3\sqrt[3]{c^2}} = 1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{c^2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow c = \sqrt{1/27}, c = -\sqrt{1/27}$.

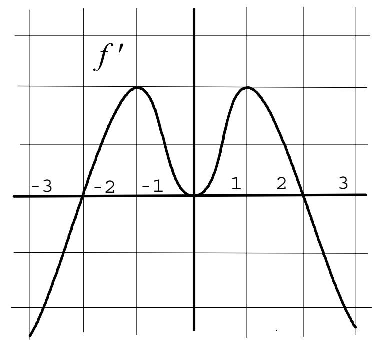
5. **La siguiente figura muestra la gráfica de la derivada de** f.

a) Hallar los intervalos de crecimiento, decrecimiento y los extremos locales de f.

b) Hallar los intervalos de concavidad, convexidad y los puntos de inflexión de f.

c) Dibuja de forma aproximada la gráfica de f''.

1,5 puntos



a) f es creciente en el intervalo (-2,2), pues $f'(x) > 0$ en dicho intervalo, excepto en x = 0.
f es decreciente en los intervalos $(-\infty, -2)$ y $(2, \infty)$, pues $f'(x) < 0$ en dichos intervalos.
Por lo anterior, f alcanza un mínimo local en el punto -2 y un máximo local en el punto 2.

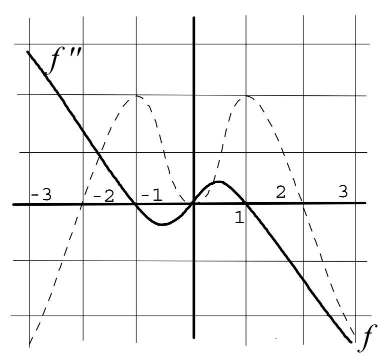
b) f es convexa en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(0, 1)$ pues $f'(x)$ es creciente en dichos intervalos.
f es cóncava en los intervalos $(-1, 0)$ y $(1, \infty)$, pues $f'(x)$ es decreciente en dichos intervalos.
Por lo anterior, los puntos de inflexión de f son $-1, 0, 1$.

c) En primer lugar, observar que $f''(-1) = f''(0) = f''(1) = 0$, pues f' alcanza un extremo local en dichos puntos.

Por otra parte, f'' es positiva en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(0, 1)$ pues $f(x)$ es convexa en dichos intervalos.

De la misma forma, f'' es negativa en los intervalos $(-1, 0)$ y $(1, \infty)$, pues $f(x)$ es cóncava en dichos intervalos.

Por lo tanto, la gráfica de f'' es, aproximadamente, como muestra la siguiente figura:



6. **Sea** $C(x) = 400 + x + 0,01x^2$ **la función de costes de una empresa. Se pide:**

a) Hallar la producción x_0 donde se igualan la función de costes medios con la función de costes marginales.

b) Supongamos ahora que los costes fijos de esta empresa aumentan. ¿Cómo afectará ello a los costes medios, a los costes marginales, así como a la producción x_0 donde se igualan ambas funciones de costes?

1 punto

---

a) La función de costes medios es $\frac{C(x)}{x} = \frac{400}{x} + 1 + 0'01x$.

La función de costes marginales es $C'(x) = 1 + 0'02x$.

Luego ambas curvas se cortan cuando $\frac{C(x)}{x} = \frac{400}{x} + 1 + 0'01x = 1 + 0'02x = C'(x)$. Es decir, cuando

$\frac{400}{x} = 0'01x \Leftrightarrow 400 = 0'01x^2 \Leftrightarrow 40000 = x^2 \Leftrightarrow x_0 = 200$

b) Supongamos ahora que $C(x) = C_0 + x + 0,01x^2$, donde $C_0 > 400$. Entonces:

La nueva función de costes medios es $\frac{C(x)}{x} = \frac{C_0}{x} + 1 + 0'01x$. Puede observarse que los costes medios han crecido

La función de costes marginales es la misma, es decir, $C'(x) = 1 + 0'02x$.

Luego ambas curvas se cortan cuando $\frac{C(x)}{x} = \frac{C_0}{x} + 1 + 0'01x = 1 + 0'02x = C'(x)$. Es decir, cuando

$\frac{C_0}{x} = 0'01x \Leftrightarrow C_0 = 0'01x^2 \Leftrightarrow 100C_0 = x^2 \Leftrightarrow x_0 = 10\sqrt{C_0}$. Y, como $\sqrt{C_0} > 20$, se deduce que, ahora, el punto de corte de ambas curvas es mayor que 200.

7. **Dada la función** $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$ **, se pide:**

a) De todas las primitivas $F(x)$ de dicha función $f(x)$, hallar aquella F que cumpla $F(2) = 3$.
b) Calcular el polinomio de Taylor de orden dos de dicha función $F(x)$ centrado en a=2.
c) Utilizando el polinomio anterior, calcular aproximadamente $F(2'2)$ y $F(1'9)$.

1'5 puntos

---

a) Haciendo el cambio de variable $x = t^2 + 1 \Leftrightarrow t = \sqrt{x-1}$, podemos calcular la primitiva de $f(x)$ de la siguiente forma:

$F(x) = \int f(x)dx = \int \frac{t^2+1}{t} 2tdt = 2\int (t^2+1)dt = 2(t^3/3 + t) + C = 2[(\sqrt{x-1})^3/3 + \sqrt{x-1}] + C.$

Luego,

$3 = F(2) = 2[(\sqrt{2-1})^3/3 + \sqrt{2-1}] + C = 2[4/3] + C = 8/3 + C \Leftrightarrow C = 1/3.$ Por tanto,

$F(x) = 2[(\sqrt{x-1})^3/3 + \sqrt{x-1}] + 1/3.$

b) Como $F(2) = 3, F'(2) = f(2) = 2,$ solo queda por hallar $F''(2)$. Para ello:

$F''(x) = f'(x) = \frac{\sqrt{x-1} - x/(2\sqrt{x-1})}{x-1}$; luego $F''(2) = 1 - \frac{2}{2} = 0.$ Por lo tanto:

$P(x) = 3 + 2(x-2) = 2x - 1.$

c) $F(2'2) \approx P(2'2) = 4'4 - 1 = 3'4;$ y, de la misma forma

$F(1'9) \approx P(1'9) = 3'8 - 1 = 2'8.$

8. **Se considera el recinto siguiente**: $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, -x^2+1 \leq y \leq -x^2+4\}$. Se pide:

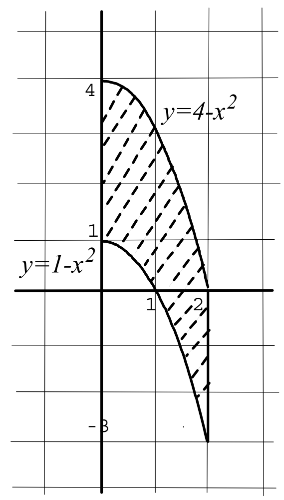
a) Dibujar el recinto.

b) Hallar los elementos maximales y minimales de dicho recinto, considerando el orden de Pareto.

c) Hallar el área de dicho recinto.

1'5 puntos

a) El recinto es, aproximadamente, el siguiente:



b) Elementos maximales: $\{(x,y) : y = 4 - x^2, 0 \leq x \leq 2\}$.

Elementos minimales: $\{(x,y) : y = 1 - x^2, 0 \leq x \leq 2\}$.

c) Como la parábola $y = 4 - x^2$ está siempre por encima de la parábola $y = 1 - x^2$, el área será el siguiente valor:

área = $\int_0^2 [(4 - x^2) - (1 - x^2)]dx = [3x]_0^2 = 6$.