Universidad Carlos III de Madrid

Exercise	1	2	3	4	5	Total
Points						

Departamento de Economía **Matemáticas I Examen Final** **22 junio 2023**

Duración: 2 horas.

APELLIDOS:		**NOMBRE:**
ID:	**GRADO:**	**GRUPO:**

(1) **Sea la función** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+5x+4}}{x+2}$**. Se pide:**

(a) Hallar el dominio y la asíntota en $+\infty$ de $f(x)$.

(b) Considerar la función $f(x)$ restringida al intervalo $[0,\infty)$. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y la imagen de $f(x)$. Representar $f(x)$.

(c) Sea $g(x)$ una función continua definida en $[0,\infty)$, creciente en $[0,a]$, decreciente en $[a,\infty)$ y que cumple: $g(0) = \lim_{x\to\infty} g(x)$.
Considerar $g(x)$, restringida al intervalo $[b,\infty)$. Hallar, dependiendo de $a, b > 0$, los extremos globales de $g(x)$.

0,4 puntos apartado a); 0,4 puntos apartado b); 0,2 puntos apartado c)

---

a) En primer lugar, el dominio de la función es $\mathbb{R} - (-4,-1)$, pues las raíces del polinomio x^2+5x+4 son $-4,-1$ y, como dicho polinomio es convexo, en el intervalo $(-4,-1)$ es negativo, luego ahí no existe la raíz.
También habría que excluir el punto $x=-2$, debido a que se anula el denominador en dicho punto, pero ya está incluido en el intervalo $(-4,-1)$.
En cuanto a la asíntota en $+\infty$, si hacemos el límite hacia ∞ obtenemos que $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+5x+4}}{x+2} =$ (dividiendo númerador y denominador por x) $= \lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{1+5/x+4/x^2}}{1+2/x} = 1$.
Por lo tanto f tiene asíntota horizontal $y=1$ en ∞.
Obviamente, como hay asíntota horizontal, no puede haber asíntota oblicua.

b) Para estudiar el crecimiento y decrecimiento, derivamos la función y estudiamos su signo:

$$f'(x) = \left(\frac{\sqrt{x^2+5x+4}}{x+2}\right)' = \frac{[(2x+5)/2\sqrt{x^2+5x+4})](x+2) - \sqrt{x^2+5x+4}}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{(2x+5)(x+2) - 2(x^2+5x+4)}{2(x+2)^2\sqrt{x^2+5x+4}} = \frac{(2x^2+9x+10)-(2x^2+10x+8)}{2(x+2)^2\sqrt{x^2+5x+4}} =$$

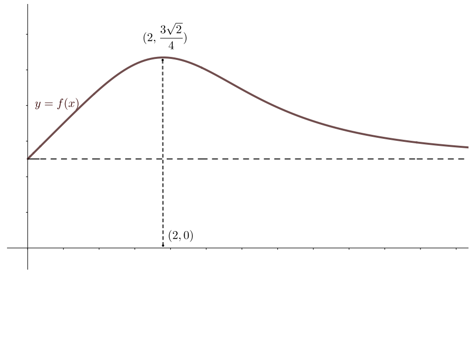
$= \dfrac{-x+2}{2(x+2)^2\sqrt{x^2+5x+4}}$, luego observamos que su signo viene determinado por el signo del numerador, pues el denominador siempre es positivo. Obtenemos:

i) $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0,2)$, luego f es creciente en $[0,2]$.

ii) $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (2,\infty)$, luego f es decreciente en $[2,\infty)$.

En cuanto a la imagen, como $f(x)$ es continua en su dominio, f es creciente en $[0,2]$, f es decreciente en $[2,\infty)$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = f(0)$, por el teorema de los valores intermedios se deduce que la imagen del intervalo $[0,\infty)$ será $[1, f(2)] = [1, \sqrt{18}/4] = [1, \frac{3}{4}\sqrt{2}]$.

En cuanto a la gráfica, tendrá un aspecto, aproximadamente, así:



c) La función $f(x)$ cumple las condiciones de $g(x)$, donde $g(0) = 1$ y $a = 2$.

Por tanto, es claro que la función no alcanza mínimo global, pues la función se acerca por arriba al valor $g(0)$ pero sin alcanzarlo.

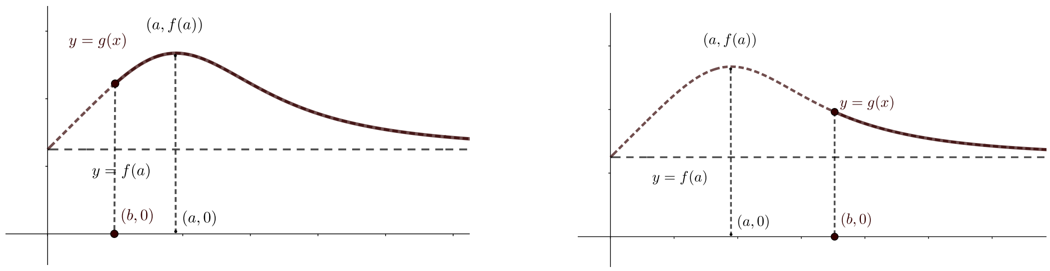
En cuanto al máximo global, hay que distiguir los siguientes casos:

i) si $b < a$, entonces el máximo global se alcanza en el punto a.

ii) si $a < b$, entonces el máximo global se alcanza en el punto b.

i) si $a = b$, entonces el máximo global se alcanza en el punto $a = b$.

Los dibujos siguientes clarificarán la situación:



(2) **Dada la función** $y = f(x)$, **definida de forma implícita mediante la ecuación** $e^{2x+y} + x^2y = e^2$ **en un entorno del punto** $x = 0, y = 2$, **se pide:**

(a) Hallar la recta tangente y el polinomio de Taylor de orden 2 de f en $a = 0$.

(b) Representar la gráfica de f cerca del punto $x = 0, y = 2$.

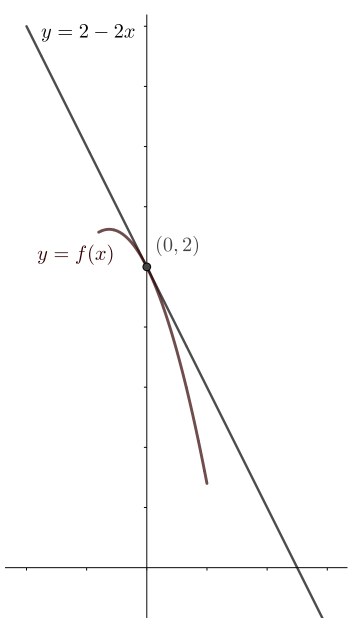
(c) Calcular aproximadamente, utilizando el polinomio de Taylor de orden 2, $f(-0,2)$ y $f(0,1)$.
Mediante dicho polinomio, comparar $f(0)$ con $\frac{1}{3}f(-0,2) + \frac{2}{3}f(0,1)$.
Sugerencia para b y c: utilizar que $f"(0) < 0$.
0,4 puntos apartado a); 0,3 puntos apartado b); 0,3 puntos apartado c).

---

a) En primer lugar, calculamos la derivada primera de la función:
$e^{2x+y}(2 + y') + 2xy + x^2y' = 0$
sustituyendo $x = 0,\ y(0) = 2$ se deduce que $y'(0) = f'(0) = -2$.
Luego la ecuación de la recta tangente será: $y = P_1(x) = 2 - 2x$, o bien $2x + y = 2$.
Análogamente, calculamos la derivada segunda de la función:
$e^{2x+y}[(2 + y')^2 + y''] + 2y + 2xy' + 2xy' + x^2y'' = 0$
sustituyendo $x = 0, y(0) = 2, y'(0) = -2$ se deduce que $y''(0) = f''(0) = -\frac{4}{e^2}$.
Luego la ecuación del polinomio de Taylor será: $y = P_2(x) = 2 - 2x - \frac{2}{e^2}x^2$

b) Utilizando el polinomio de Taylor de orden 2, la gráfica de f, cerca del punto $x = 0$, será, aproximadamente, como se ve en la figura al final.

c) Por otro lado, utilizando el polinomio de Taylor, tenemos que:
$f(-0,2) \approx 2 - 2(-0,2) - \dfrac{2}{e^2}\ 0,04$; $f(0,1) \approx 2 - 2(0,1) - \dfrac{2}{e^2}0,01 \Longrightarrow$
$\frac{1}{3}f(-0,2) + \frac{2}{3}f(0,1) = 2 - \dfrac{2}{e^2}0,02 < 2 = f(0) = f(\frac{1}{3}(-0,2) + \frac{2}{3}(0,1))$.
Lo cual es esperable, debido a que $f(x)$ es cóncava cerca de $x = 0$.



(3) **Sea $C(x) = C_0 + 2x + x^2$ la función de costes y $p(x) = 100 - ax$ la función inversa de demanda de una empresa monopolista, donde $a, C_0 > 0$. Se pide:**

(a) Si sabemos que el nivel de producción para el que se maximiza el beneficio es $x^* = 7$, calcular el valor de los parámetros a, C_0.

(b) Si sabemos que el nivel de producción para el que se minimiza el coste medio es $x^{**} = 7$, calcular el valor de los parámetros a, C_0.

0,5 puntos apartado a); 0,5 puntos apartado b).

---

a) En primer lugar, calculamos la función de beneficios.
$B(x) = (100 - ax)x - (C_0 + 2x + x^2) = -(a+1)x^2 + 98x - C_0$
Si calculamos la primera y segunda derivada de B :
$B'(x) = -2(a+1)x + 98$; $B''(x) = -2(a+1) < 0$
luego vemos que B tiene un único punto crítico en $x^* = \dfrac{98}{2(a+1)}$ y, como B es una función cóncava, este punto crítico es el único maximizador global.
Luego $x^* = 7 = \dfrac{98}{2(a+1)} \Longrightarrow a = 6$; C_0 puede tomar cualquier valor.

b) Como la función de coste medio es $\dfrac{C(x)}{x} = x + 2 + \dfrac{C_0}{x}$, su derivada será: $\left(\dfrac{C(x)}{x}\right)' = 1 - \dfrac{C_0}{x^2} =$
$= 0 \Longleftrightarrow x^2 = C_0$.
Como $\left(\dfrac{C(x)}{x}\right)'' = \dfrac{2C_0}{x^3} > 0$, la función es convexa y el punto crítico será minimizador global.
Luego $x^{**} = 7 \Longrightarrow C_0 = 49; a$ puede tomar cualquier valor.

(4) **Sea** $f(x) = \ln(a + e^x)$, **restringida a** $[0, \infty)$, **donde** $0 < a$. **Se pide:**

(a) Hallar la asíntota de dicha función en $+\infty$.

(b) Estudiar el crecimiento/decrecimiento y la concavidad/convexidad de dicha función.

(c) Representar $f(x)$ y su inversa, precisando su dominio de definición (obviamente, no es necesario ni calcular la función inversa ni sus derivadas.

Sugerencia parte a): utilizar que $\ln e^x = x$ y que $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$.

0,4 puntos apartado a); 0,2 puntos apartado b); 0,4 puntos apartado c).

---

a) Dicha función no tiene asíntotas verticales, pues es continua en su dominio.

En cuanto a asíntotas en el infinito, como:

$\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{\ln(a+e^x)}{x} = \frac{\infty}{\infty} =$ (L'Hopital)$= \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{e^x}{a+e^x} = \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{1}{(a/e^x)+1} = 1$.Por otro lado,

$\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \ln(a+e^x) - x = \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \ln(a+e^x) - \ln e^x = \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \ln \dfrac{a+e^x}{e^x} = \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \ln(\dfrac{a}{e^x} + 1) =$

$= \ln 1 = 0$, luego la asíntota oblicua es $y = x$.

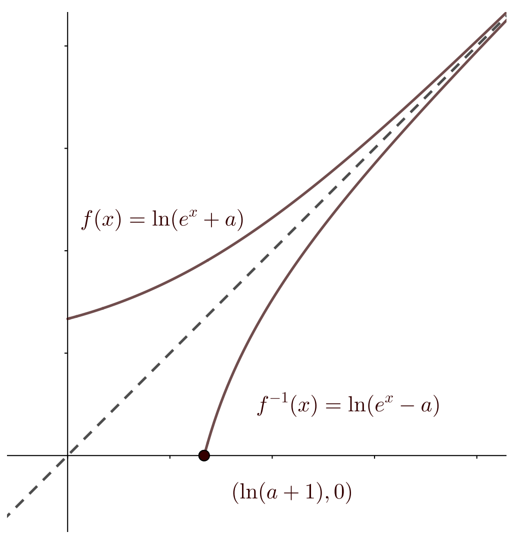
b) Obviamente, $f\,'(x) = \dfrac{e^x}{a+e^x} > 0$, luego dicha función es creciente.

Análogamente, $f"(x) = \dfrac{e^x(a+e^x) - e^x e^x}{(a+e^x)^2} = \dfrac{ae^x}{(a+e^x)^2} > 0$, luego $f(x)$ es convexa.

c) Por los datos anteriores, la función $f(x)$ tendrá la gráfica que se ve debajo.

Por simetría respecto a la diagonal principal, esa sería la gráfica de su inversa.

Si se quisiera calcular su inversa, sería la función $f^{-1}(x) = \ln(e^x - a)$, restringida al intervalo $[\ln(a+1), \infty)$.



(5) **Dadas la funciones** $f, g : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, **definidas por:** $f(x) = -\ln(1+x)$, $g(x) = 1 - \ln(1+3x)$ **se pide:**

(a) Representar aproximadamente el conjunto A, delimitado por las gráficas de dichas funciones, y la recta $x = 0$.

Hallar, si existen, los maximales y minimales, máximo y mínimo de A.

(b) Calcular el área del conjunto dado.

Sugerencia para a: recordar que $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$.

Sugerencia para b: una vez aplicada la regla de Barrow, ¡NO hace falta simplificar la expresión!

0,6 puntos apartado a); 0,4 puntos apartado b)

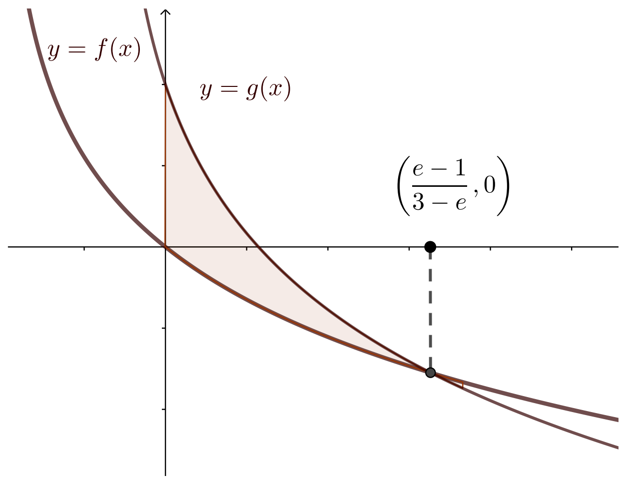
---

a) En primer lugar observamos que $f(0) = 0 < 1 = g(0)$. Por otro lado, dichas funciones se cortan cuando:

$-\ln(1+x) = 1 - \ln(1+3x) \iff \ln(\dfrac{1+3x}{1+x}) = 1 \iff \dfrac{1+3x}{1+x} = e \iff 1 + 3x = e + ex \iff$

$\iff (3-e)x = e - 1 \iff x = (e-1)/(3-e) = x^*$.

Como, además, ambas funciones son decrecientes, se deduce que el dibujo de A será, aproximadamente:



Por tanto, el orden de Pareto nos describe al conjunto así:

máximo(A), mínimo(A) no existen.

maximales$(A) = \{(x, g(x)) : 0 \leq x \leq x^*\}$.

minimales$(A)\} = \{(x, f(x)) : 0 \leq x \leq x^*\}$.

b) En primer lugar, por la posición de las funciones, sabemos que:

área(A)=$\int_0^{x^*} (1 - \ln(1+3x) + \ln(1+x))dx$; por otro lado:

i) $\int 1 \cdot \ln(1+x)dx = x\ln(1+x) - \int x \cdot \dfrac{1}{1+x}dx = x\ln(1+x) - \int \dfrac{x+1-1}{1+x}dx =$

$= x\ln(1+x) - x + \ln(1+x)$

ii) $\int 1 \cdot \ln(1+3x)dx = x\ln(1+3x) - \int x \cdot \dfrac{3}{1+3x}dx = x\ln(1+3x) - \int \dfrac{3x+1-1}{1+3x}dx =$

$= x\ln(1+3x) - x + \frac{1}{3}\int \dfrac{3}{1+3x}dx = x\ln(1+3x) - x + \frac{1}{3}\ln(1+3x)$

si llamamos: $H(x) = x - (x\ln(1+3x) - x + \frac{1}{3}\ln(1+3x)) + x\ln(1+x) - x + \ln(1+x)$,

aplicando Barrow: área (A)= $[H(x)]_0^{x^*} = H(x^*) - H(0)$ uds área.