Universidad Carlos III de Madrid

Ejercicio	1	2	3	4	5	6	Total
Puntos							

Departamento de Economía **Examen Final de Matemáticas I** **23 de Junio de 2017**

Duración del Examen: 2 horas.

APELLIDOS: **NOMBRE:**

DNI: **Titulación:** **Grupo:**

(1) **Sea la función** $f(x) = e^{Q(x)}$, **donde** $Q(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$**. Se pide:**

(a) Representa la gráfica de $f(x)$ hallando previamente el dominio, las asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos locales y/o globales y la imagen de $f(x)$.

(b) Considera la función $f(x)$ restringida al intervalo $[2, \infty)$. Dibuja la gráfica de $f^{-1}(x)$, hallando previamente el dominio, la imagen y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f^{-1}(x)$.

Sugerencia para b: no intentar hallar la expresión analítica de $f^{-1}(x)$.

0,6 puntos apartado a); 0,4 puntos apartado b).

---

a) El dominio es toda la recta real, excluyendo el punto $x = 1$.

Hay asíntota vertical en $x = 1^+$, pues $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} \dfrac{x^2}{x-1} = \infty \Longrightarrow \lim\limits_{x \longrightarrow 1^+} f(x) = \infty$.

Por otro lado, $\lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} \dfrac{x^2}{x-1} = -\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x \longrightarrow 1^-} f(x) = 0$.

No puede haber más asíntotas verticales, pues la función es continua en los restantes puntos.

Por otra parte, hay asíntota horizontal en $-\infty$, pues $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \dfrac{x^2}{x-1} = -\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = 0$.

Análogamente, como $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \frac{\infty}{\infty} =$ (por la regla de L'Hopital)

$= \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} f(x) \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \infty \Longrightarrow$no existe asíntota horizontal ni oblícua en ∞.

En cuanto a la monotonía de la función, la derivamos y obtenemos que, si $x \neq 1$:

$f\,'(x) = f(x) \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$, de lo que se deduce que:

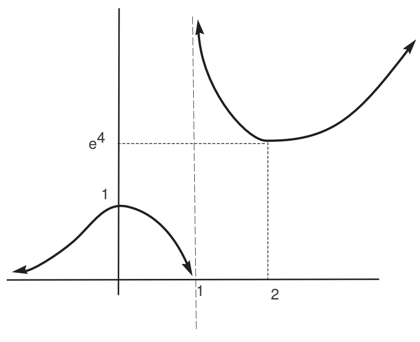
f es creciente en $(-\infty, 0]$ y en $[2, \infty)$, pues $f\,'(x) > 0$ en $(-\infty, 0)$ y en $(2, \infty)$.

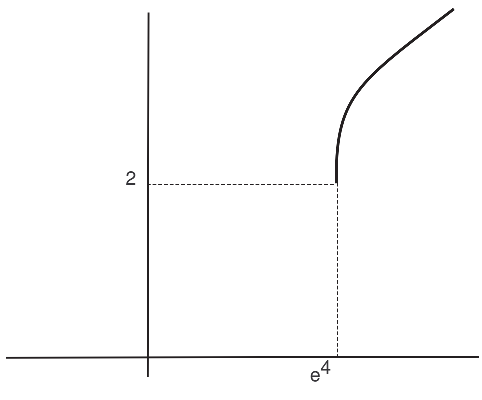
f es decreciente en $[0, 1)$ y en $(1, 2]$, pues $f\,'(x) < 0$ en $(0, 1)$ y en $(1, 2)$.

Luego f alcanza un máximo local en $x = 0$ y un mínimo local en $x = 2$.

Por lo tanto, su imagen será $(0, 1] \cup [e^4, \infty)$.

Así pues, la gráfica de la función $f(x)$ será, aproximadamente, como la primera figura:





b) Partimos de la función $f(x)$, continua y creciente en $[2, \infty)$ y con imagen $[e^4, \infty)$.

Por lo tanto, su función inversa es continua y creciente y tendría como dominio el intervalo $[e^4, \infty)$ y su imagen sería el intervalo $[2, \infty)$.

Así pues, la gráfica de la función $f^{-1}(x)$ será, aproximadamente, como la segunda figura.

(2) **Sea** $y = f(x)$ **la función definida de forma implícita cerca del punto** $(2, 1)$ **a partir de la ecuación:** $4xy - (x^2 + y^2) = 3$**. Se pide:**

(a) Hallar las derivadas primera y segunda de la función f en el punto $x = 2, y = 1$.

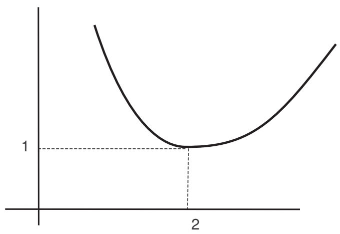
(b) Hallar la recta tangente y el polinomio de Taylor de orden 2 de la función f en el punto $(2, 1)$. Representar la gráfica de dicha función cerca de ese punto.

0,4 puntos apartado a; 0,6 puntos apartado b

---

a) En primer lugar, derivamos la ecuación:
$4(y + xy') - 2(x + yy') = 0$.
Sustituyendo en dicha ecuación $x = 2, y = 1$ se obtiene:
$4 + 8y' - 4 - 2y' = 0 \Longrightarrow y' = 0$.
Derivando de nuevo la ecuación sin hacer las sustituciones:
$4(2y' + xy") - 2(1 + (y')^2 + yy") = 0$.
Sustituyendo en dicha ecuación $x = 2, y = 1, y' = 0$ se obtiene:
$8y" - 2(1 + y") = 0 \Longrightarrow 6y" = 2 \Longrightarrow y" = \frac{1}{3}$.

b) La recta tangente tendrá como ecuación:
$y = 1$.
El polinomio de Taylor de orden 2 tendrá como ecuación:
$y = 1 + \frac{1}{2}(\frac{1}{3})(x - 2)^2$
Por tanto, la función implícita tendrá un mínimo local cerca del punto $x = 2$, y su gráfica será, aproximadamente, así:



(3) **Sea $C(x)=\sqrt{x^2-2x+4}$ la función de costes de una compañía monopolista, donde $x \geq 0$ representa la cantidad en kilogramos de dicho producto. Se pide:**

(a) Hallar la ecuación de la recta tangente a $C(x)$ en $x=2$, y calcule una aproximación al valor de $C(\ 2,1)$.

(b) Supongamos ahora que la nueva función de costes es $C_1(x)=f(C(x))$, donde $f(x)$ es una función creciente y derivable tal que $f(2)=1, f\ '(2)=3$. Calcular, para la nueva función de costes, la ecuación de la recta tangente a $C_1(x)$ en $x=2$, y calcule una aproximación al valor de $C_1(\ 2,1)$.

¿Han crecido o decrecido los costes marginales en $x=2$, respecto al apartado a)?

0,4 puntos apartado a; 0,6 puntos apartado b

---

a) En primer lugar, $C'(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+4}}$, luego $C'(2)=\frac{1}{2}$.
Por otro lado, como $C(2)=2$, la ecuación de la recta tangente será:
$y=2+\frac{1}{2}(x-2)$
Ahora, aproximando $C(2,1)$ por la recta tangente, obtenemos:
$C(2,1)\approx 2+\frac{1}{2}(2,1-2)=2,05$ unidades monetarias.

b) En primer lugar, $C_1'(x)=f\ '(C(x)).C'(x)$, luego $C_1'(2)=f\ '(2).C'(2)=\frac{3}{2}$.
Por otro lado, como $C_1(2)=f(2)=1$, la ecuación de la recta tangente será:
$y=1+\frac{3}{2}(x-2)$
Ahora, aproximando $C_1(2,1)$ por la recta tangente, obtenemos:
$C_1(2,1)\approx 1+\frac{3}{2}(2,1-2)=1,15$ unidades monetarias.
Obviamente, los costes marginales han crecido en $x=2$, al pasar de valer antes $\frac{1}{2}$ a valer ahora $\frac{3}{2}$.

(4) **Sean a, b números reales y consideremos la siguiente función definida a trozos**

$$f(x) = \begin{cases} ae^{4x} - be^{-4x} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x + \ln(1 + 2ax + 2bx) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$ **. Se pide:**

(a) Discutir, según los valores $a, b > 0$, la continuidad de la función anterior en toda la recta real.

(b) Discutir, según los valores $a, b > 0$, la derivabilidad de la función anterior en toda la recta real.

1 punto

---

a) Para cualquiera valor de $a, b > 0$ la función es continua si $x \neq 0$.
Además, en $x = 0$, la función es continua por la izquierda si se cumple que:
$\lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = f(0) \Longleftrightarrow a - b = 0 \Longleftrightarrow a = b.$
Por otro lado, la función es continua en 0^+ para cualquier $a, b > 0$.
Luego se cumple que $f(x)$ es continua en todo x cuando $a = b > 0$.

b) Desde luego, cuando $x \neq 0$ la función anterior es derivable para cualquer $a, b > 0$.
En cuanto al punto $x = 0$, vamos a calcular las derivadas laterales, utilizando que la función es continua en dicho punto cuando $a = b$.
$f'_-(0) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} f\,'(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} 4ae^{4x} + 4be^{-4x} = 4(a + b)$
$f'_+(0) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f\,'(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} (1 + \dfrac{2(a + b)}{1 + 2ax + 2bx}) = 1 + 2(a + b).$
Luego la función será derivable en todo punto cuando $a = b, 2(a + b) = 1$.
En otras palabras, cuando $a = b = \frac{1}{4}$

(5) **Se considera el conjunto A limitado por las gráficas de las funciones $y = \dfrac{1}{1+x}, y = -e^{-x}$ y las rectas $x = 0,\ x = 1$. Se pide:**

(a) Representar el conjunto A y hallar los maximales y minimales, máximo y mínimo de A, si existen.

(b) Calcular el área del recinto anterior.

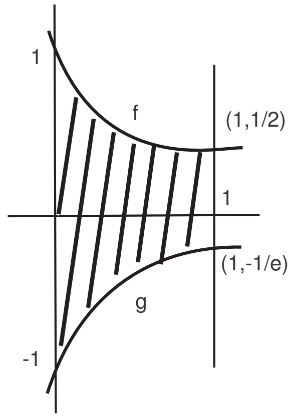
Sugerencia para a: el orden de Pareto viene dado por: $(x_0, y_0) \leq_P (x_1, y_1) \Longleftrightarrow x_0 \leq x_1, y_0 \leq y_1$.

Sugerencia para b: no intentar calcular el valor pedido en forma decimal, basta dejarlo indicado.

0,6 puntos apartado a; 0,4 puntos apartado b

---

a) La función $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ es positiva y decreciente en el intervalo $[0, 1]$,
y la función $g(x) = -e^{-x}$ es negativa y creciente en el mismo intervalo
(pues basta comprobar que $g'(x) = e^{-x} > 0$).
Además, como $f(0) = 1 > -1 = g(0), f(1) = \frac{1}{2} > -\frac{1}{e} = g(1)$, el conjunto A tendrá una forma, aproximadamente, así:



Obviamente, por el dibujo se deduce que
$\{\text{maximales}(A)\} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, y = \dfrac{1}{1+x}\} \Longrightarrow$ máximo (A) no existe.
$\{\text{minimales}(A)\} = \{(0, -1)\} = \{\text{ mínimo}(A)\}$.

b) El área solicitada es la que queda debajo de la función racional y encima de la exponencial, limitada por las rectas verticales $x = 0, x = 1$.
El área pedida es, por tanto: $\int_0^1 (\dfrac{1}{1+x} - (-e^{-x}))dx = \int_0^1 (\dfrac{1}{1+x} + e^{-x})dx$
Integrando de forma directa:
$\int (\dfrac{1}{1+x} + e^{-x})dx = \ln(1+x) - e^{-x}$
Por tanto, aplicando la regla de Barrow, se obtiene que el área pedida es:
$\int_0^1 (\dfrac{1}{1+x} + e^{-x})dx = [\ln(1+x) - e^{-x}]_0^1 = \ln 2 - e^{-1} - (0 - 1) =$
$= 1 - e^{-1} + \ln 2$ unidades de área.

(6) **Dada la función** $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x^4}$, **definida en** $[0,2]$, **se pide:**

(a) Hallar el área encerrada entre la gráfica de dicha función, el eje horizontal y la recta vertical $x = 2$.

(b) Calcular aproximadamente, mediante el polinomio de Taylor de orden 2 de $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)dt$ centrado en $x = 1$, el área encerrada entre la gráfica de dicha función f, el eje horizontal y las rectas verticales $x = 1$ y $x = 1,1$.

0,4 puntos apartado a; 0,6 puntos apartado b

---

a) $f(x)$ es una función continua y positiva en el intervalo $[0,2]$.

Luego el área pedida coincide con la integral $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^3}{1+x^4}dx$.

La primitiva de f es $\int \dfrac{x^3}{1+x^4} = \frac{1}{4}\ln(1+x^4)$.

Por tanto, el área solicitada es, por la regla de Barrow, igual a:

$\displaystyle\int_0^2 \frac{x^3}{1+x^4}dx = [\frac{1}{4}\ln(1+x^4)]_0^2 = \frac{1}{4}\ln(17)$ unidades de área.

b) Como el polinomio de Taylor, centrado en $x = 1$, de la función $F(x)$ es:

$P(x) = F(1) + F'(1)(x-1) + \frac{1}{2}F"(1)(x-1)^2$

entonces, $P(1,1)$ es una aproximación a $F(1,1) = \displaystyle\int_1^{1,1} f(t)dt$, el área pedida.

Obviamente, $F(1) = \displaystyle\int_1^1 f(t)dt = 0$,

$F'(1) =$(por el teorema fundamental del cálculo)$= f(1) = \frac{1}{2}$.

Y, como $f\,'(x) = \dfrac{3x^2(1+x^4) - 4x^3x^3}{(1+x^4)^2} = \dfrac{3x^2 - x^6}{(1+x^4)^2} \Longrightarrow F"(1) = f\,'(1) = \frac{1}{2}$

Por lo tanto, $P(x) = \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2$.

Luego área aproximada$= P(1,1) = \frac{1}{2}.0,1 + \frac{1}{4}.0,01 = 0,0525$ unidades de área.