Universidad Carlos III de Madrid

Ejercicio	1	2	3	4	5	6	Total
Puntos							

Departamento de Economía **Examen Final de Matemáticas I** **24 de Junio de 2016**

Duración del Examen: 2 horas.

APELLIDOS:		**NOMBRE:**
DNI:	**Titulación:**	**Grupo:**

(1) **Sea la función $f(x) = \sqrt[3]{x^2(1-x)}$. Se pide:**

(a) Representa la gráfica de $f(x)$ hallando previamente el dominio, las asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos locales y/o globales y la imagen de $f(x)$.

(b) Considera la función $f(x)$ restringida al intervalo $[0, \frac{2}{3}]$. Dibuja la gráfica de $f^{-1}(x)$, hallando previamente el dominio, la imagen, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los puntos fijos de $f^{-1}(x)$.

Sugerencia para a: basta calcular la asíntota, si existe, en ∞. En $-\infty$ se haría igual.

Sugerencia para b: no intentar hallar la expresión analítica de $f^{-1}(x)$. Además, los puntos fijos de una función y su inversa son los mismos.

0,6 puntos apartado a); 0,4 puntos apartado b).

---

a) El dominio es toda la recta real.

No hay asíntotas verticales, pues la función es continua en todos los puntos.

Por otra parte, hay asíntota oblícua en ∞, pues $\lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \sqrt[3]{(1-x)/x} = -1$.

Por otro lado, $\lim_{x\longrightarrow\infty} f(x) + x = \lim_{x\longrightarrow\infty} [\sqrt[3]{x^2(1-x)} + x] = \lim_{x\longrightarrow\infty} [(\sqrt[3]{(1-x)/x} + 1)x] =$

$= \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{\sqrt[3]{1/x - 1} + 1}{1/x} = \frac{0}{0} =$ (por la regla de L'Hopital)

$= \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{(1/3)(1/x-1))^{2/3}(-1/x^2)}{-1/x^2} = \lim_{x\longrightarrow\infty} \frac{1}{3}(1/x-1)^{2/3} = 1/3$

Por tanto, la recta $y = -x + \frac{1}{3}$ es la asíntota oblícua en ∞.

Análogamente, la misma recta es la asíntota oblicua en $-\infty$.

Por lo anterior, no hay asíntotas horizontales, ni extremos globales y, al ser la función continua en toda la recta real, su imagen es también toda la recta real.

En cuanto a la monotonía de la función, la derivamos y obtenemos que, si $x \neq 0$:

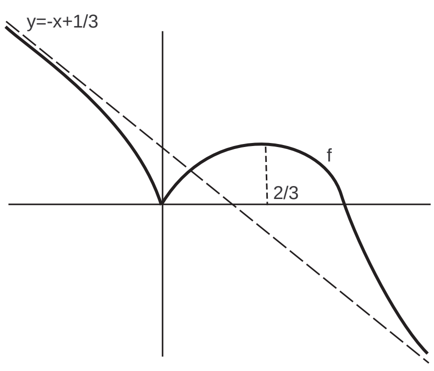
$f\,'(x) = \frac{1}{3}(x^2 - x^3)^{-2/3}(2x - 3x^2)$, de lo que se deduce que

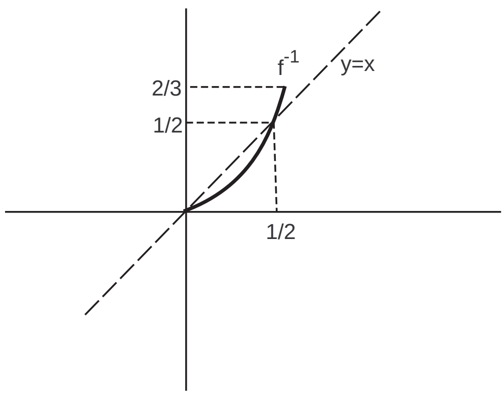
f es creciente en $[0, \frac{2}{3}]$, pues $f\,'(x) > 0$ en $(0, \frac{2}{3})$.

f es decreciente en $(-\infty, 0]$ y en $[\frac{2}{3}, \infty)$, pues $f\,'(x) < 0$ en $(-\infty, 0)$ y en $(\frac{2}{3}, \infty)$.

Luego f alcanza un mínimo local en $x = 0$ y un máximo local en $x = \frac{2}{3}$.

Así pues, la gráfica de la función $f(x)$ será, aproximadamente, como la primera figura:





b) Partimos de la función $f(x)$, continua y creciente en $[0, \frac{2}{3}]$ y con imagen $[0, \sqrt[3]{4}/3]$.
Por lo tanto, la función inversa sería continua y creciente y tendría como dominio el intervalo $[0, \sqrt[3]{4}/3]$ y su imagen sería el intervalo $[0, \frac{2}{3}]$.
Por último, los únicos puntos fijos de f son $x = 0, x = \frac{1}{2}$, pues $f(x) = x \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow (x^2(1-x))^{1/3} = x \Longleftrightarrow x^2(1-x) = x^3 \Longleftrightarrow 1 - x = x$ o $x = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{2}$ o $x = 0$.
Así pues, la gráfica de la función $f^{-1}(x)$ será, aproximadamente, como indica la segunda figura.

(2) **Sea $y = f(x)$ la función definida de forma implícita cerca del punto $(1, 1)$ a partir de la ecuación: $2y + e^{x-y} = 3$. Se pide:**

(a) Hallar las derivadas primera y segunda de la función f en el punto $x = 1, y = 1$.

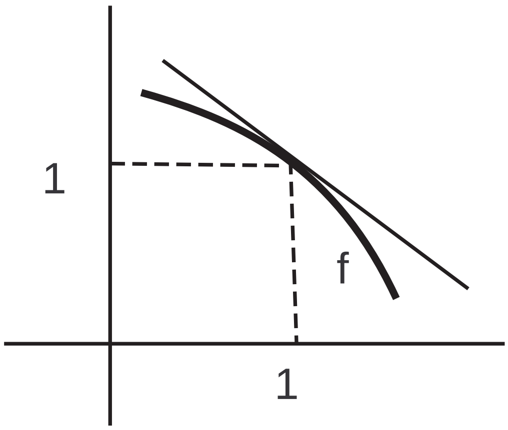
(b) Hallar la recta tangente y el polinomio de Taylor de orden 2 de la función f en el punto $(1, 1)$. Representar la gráfica de dicha función cerca de ese punto.

0,4 puntos apartado a; 0,6 puntos apartado b

---

a) En primer lugar, derivamos la ecuación:
$2y' + e^{x-y}(1 - y') = 0.$
Sustituyendo en dicha ecuación $x = 1, y = 1$ se obtiene:
$2y' + 1 - y' = 0 \Longleftrightarrow y' = -1.$
Derivando de nuevo la ecuación sin hacer las sustituciones:
$2y" + e^{x-y}[(1 - y')^2 - y"] = 0$
Sustituyendo en dicha ecuación $x = 1, y = 1, y' = -1$ se obtiene:
$y" + 4 = 0 \Longrightarrow y" = -4.$

b) La recta tangente tendrá como ecuación:
$y = 1 + (-1)(x - 1) = -x + 2.$
El polinomio de Taylor de orden 2 tendrá como ecuación:
$y = 1 + (-1)(x - 1) + \frac{1}{2}(-4)(x - 1)^2$
Por tanto, la función implícita será decreciente y cóncava cerca del punto $x = 1$, y su gráfica será, aproximadamente, así:



(3) **Sea** $C(x) = 0,01ax^2 + 2x + a$ **la función de costes y** $p(x) = b - 2x$ **la función (inversa) de demanda de una compañía monopolista. Se pide:**

(a) Hallar, en función de $a > 0$, la producción x_0 que minimiza el coste medio de dicha compañía.

(b) Supongamos ahora que $a = 100$ y $b > 2$. Hallar, en función de b, la producción x_1 que maximiza el beneficio de dicha compañía.

Observación: la producción de los diversos apartados puede depender, o no, de los diversos parámetros.

1 punto

---

a) En primer lugar, sea $\dfrac{C(x)}{x} = 0,01ax + 2 + \dfrac{a}{x}$ la función de costes medios.
Derivando esta función, obtenemos:
$(\dfrac{C(x)}{x})' = 0,01a - \dfrac{a}{x^2} = 0 \iff x^2 = 100 \iff x_0 = 10$
independientemente del parámetro a.
Observando que la función de costes medios es convexa, pues $(\dfrac{C(x)}{x})'' > 0$,
el punto crítico será el único minimizador global de los costes medios.

b) Como $a = 100$, la función de beneficios es:
$B(x) = I(x) - C(x) = bx - 2x^2 - (x^2 + 2x + a) = -3x^2 + (b-2)x - 100$
el punto crítico x_1 de dicha función de beneficios será:
$B'(x_1) = -6x_1 + b - 2 = 0 \iff x_1 = (b-2)/6$.
Y, observando que la función de beneficios es cóncava, pues $B''(x) < 0$,
el punto crítico será el único maximizador global de los beneficios.

(4) **Sean a, b números reales y consideremos la siguiente función definida a trozos**

$$f(x) = \begin{cases} 4ae^{ax} & \text{si } x < 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \\ 2\sqrt{x+b} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$ **. Se pide:**

(a) Discutir, según los valores a, b, cuando la función anterior es continua en toda la recta real.

(b) Discutir, según los valores a, b, cuando la función anterior es derivable en toda la recta real.

1 punto

---

a) Para cualquier valor a, la función es continua en $x < 0$.
Además, en $x = 0$, la función es continua por la izquierda si se cumple que:
$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = f(0) \Longleftrightarrow 4ae^0 = 2 \Longleftrightarrow a = \frac{1}{2}$.
Por otro lado, la función es continua si $x > 0$ cuando $b \geqslant 0$.
Y, en particular, f es continua en $x = 0$ por la derecha si se cumple que.
$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Longleftrightarrow 2\sqrt{b} = 2 \Longleftrightarrow b = 1$.
Luego se cumple que $f(x)$ es continua en todo x cuando $a = \frac{1}{2}, b = 1$.

b) Desde luego, cuando $x \neq 0$ la función anterior es derivable si $b \geqslant 0$ pues, en un entorno de dicho punto la función coincide con una exponencial o una raíz cuadrada.
En cuanto al punto $x = 0$, vamos a calcular las derivadas laterales, utilizando que la función es continua en dicho punto cuando $a = \frac{1}{2}, b = 1$.
$f'_-(0) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} 4a^2e^{ax} = 4a^2e^0 = 4a^2 = 1$
$f'_+(0) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{2}{2\sqrt{x+1}} = 1.$
Luego la función será derivable en todo punto cuando $a = \frac{1}{2}, b = 1$.

(5) **Se considera el conjunto A limitado por las gráficas de las funciones $y = x^3, y = -xe^{x-2} + 10$ y las rectas $x = 0$, $x = 2$. Se pide:**

(a) Representar el conjunto A y hallar los maximales y minimales, máximo y mínimo de A, si existen.

(b) Calcular el área del recinto anterior.

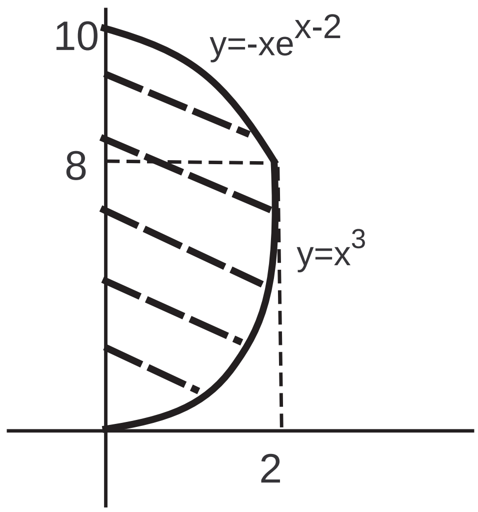
Sugerencia para a: el orden de Pareto viene dado por: $(x_0, y_0) \leq_P (x_1, y_1) \Longleftrightarrow x_0 \leq x_1, y_0 \leq y_1$.

Sugerencia para b: no intentar calcular exactamente los valores pedidos, basta dejarlos indicados.

1 punto

---

a) La función $f(x) = x^3$ es positiva y creciente en el intervalo $[0, 2]$,
y la función $g(x) = -xe^{x-2} + 10$ es decreciente en el mismo intervalo
(pues basta comprobar que $g'(x) = -e^{-2}e^x(x+1) < 0$) y positiva en dicho intervalo, pues $g(2) > 0$.
Además, como $f(0) = 0 < 10 = g(0), f(2) = 8 = g(2)$, el conjunto A tendrá una forma, aproximadamente, así:



Obviamente, por el dibujo se deduce que
$\{\text{maximales}(A)\} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, y = -xe^{x-2} + 10\} \Longrightarrow$ máximo (A) no existe.
$\{\text{minimales}(A)\} = \{(0, 0)\} = \{$ mínimo$(A)\}$.

b) El área solicitada es la que queda debajo de la función exponencial y encima de la potencial, limitada por las rectas verticales $x = 0, x = 2$.
El área pedida es, por tanto: $\int_0^2 (-xe^{x-2} + 10 - x^3)dx$
Integrando por partes:
$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = (x - 1)e^x$, luego
$\int(-xe^{x-2} + 10 - x^3)dx = -e^{-2} \int xe^x dx + 10x - \int x^3 dx = -e^{-2}(x - 1)e^x + 10x - x^4/4.$
Por tanto, aplicando la regla de Barrow, se obtiene que el área pedida es:
$\int_0^2 (-xe^{x-2} + 10 - x^3)dx = [-e^{-2}(x - 1)e^x + 10x - x^4/4]_0^2 = -e^{-2}(2 - 1)e^2 + 20 - 2^4/4 - e^{-2} =$
$= -1 + 20 - 4 - e^{-2} = 15 - e^{-2}$ unidades de área.

(6) **Dada la función** $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$, **definida en** $[0,2]$, **se pide:**

(a) Hallar los extremos locales y globales de la función en dicho intervalo.
Justifica tu respuesta enunciando los teoremas que utilices.

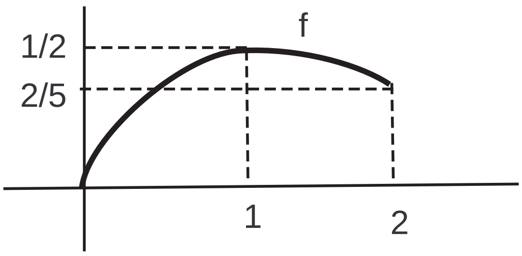
(b) Sin calcular ninguna integral, halla la mejor aproximación, mediante números racionales, por defecto y por exceso, de la integral $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{1+x^2}dx$
Sugerencia para b: no hallar la primitiva; utilizar la información del apartado anterior y dibujar la gráfica de f.

1 punto

---

a) $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[0,2]$, cerrado y acotado, luego por el teorema de Weierstrass se deduce que la función alcanza sus extremos globales en dicho intervalo.
Como $f\,'(x) = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \Longleftrightarrow x = 1$, si $x \in [0,2]$, se deduce que el único extremo local posible es dicho punto.
Como $f\,'(x) > 0$ si $0 < x < 1$, se deduce que f es creciente en el intervalo $[0,1]$.
Como $f\,'(x) < 0$ si $1 < x < 2$, se deduce que f es decreciente en el intervalo $[1,2]$.
Por lo tanto, se deduce que:
i) f alcanza un máximo local y global en $x = 1$.
ii) como $f(0) = 0, f(2) = \frac{2}{5}$, se obtiene que f alcanza su mínimo global en $x = 0$.
Observación: si se quiere, f alcanza también mínimos locales en $x = 0$ y $x = 2$.

b) La gráfica de f será, aproximadamente, así:



Por el dibujo anterior se observa lo siguiente:
i) $0 < f(x) < \frac{1}{2}$ si $x \in (0,1) \Longrightarrow 0 < \int_0^1 \dfrac{x}{1+x^2}dx < \frac{1}{2}$.
ii) $\frac{2}{5} < f(x) < \frac{1}{2}$ si $x \in (1,2) \Longrightarrow \frac{2}{5} < \int_1^2 \dfrac{x}{1+x^2}dx < \frac{1}{2}$.
Luego sumando las desigualdades anteriores se deduce que:
$0 + \frac{2}{5} < \int_0^1 \dfrac{x}{1+x^2}dx + \int_1^2 \dfrac{x}{1+x^2}dx = \int_0^2 \dfrac{x}{1+x^2}dx < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$
Por tanto, obtenemos que $\frac{2}{5}$ es la mejor estimación por defecto.
Análogamente, 1 es la mejor estimación por exceso.