Universidad Carlos III de Madrid

Ejercicio	1	2	3	4	5	6	Total
Puntos							

Departamento de Economía **Examen Final de Matemáticas I** **26 de Junio de 2014**

Duración del Examen: 2 horas.

APELLIDOS: **NOMBRE:**

DNI: **Titulación:** **Grupo:**

(1) **Sea la función** $f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$**. Se pide:**

(a) Representa la gráfica de $f(x)$ hallando previamente el dominio, las asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y la imagen de $f(x)$.

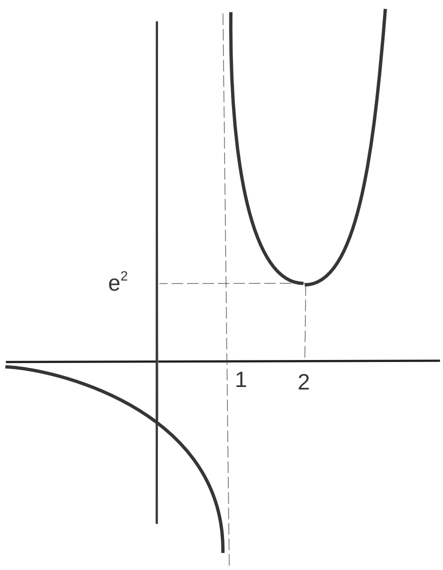
(b) Considera la función $f(x)$ restringida al intervalo $(1, 2]$.
Dibuja la gráfica de $f^{-1}(x)$, hallando previamente el dominio, la imagen, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y las asíntotas de $f^{-1}(x)$.
Sugerencia: no intentar hallar la expresión analítica de $f^{-1}(x)$.

1 punto

---

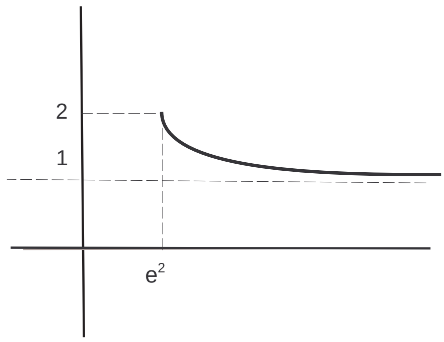
a) El dominio es la recta real excepto el punto $x = 1$, pues solo en ese punto se anula el denominador.
Habría una asíntota vertical en $x = 1$, pues en ese punto sucede lo siguiente:
$\lim\limits_{x\longrightarrow 1-} f(x) = \dfrac{e}{0-} = -\infty$, $\lim\limits_{x\longrightarrow 1+} f(x) = \dfrac{e}{0+} = \infty$.
Además, hay asíntota horizontal en $-\infty$, pues $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} f(x) = \frac{0}{-\infty} = 0$.

Por otra parte, no hay asíntota ni oblícua ni horizontal en ∞, pues $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\longrightarrow\infty} f(x) = \infty$, sin más que aplicar L'Hopital dos y una vez, respectivamente.
Por otro lado, como $f\,'(x) = \dfrac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}$, y la función exponencial es positiva,
se deduce que f es decreciente en los intervalos $(-\infty, 1)$ y $(1, 2]$, y creciente en $[2, \infty)$.
Por último, como $f(2) = e^2$, $\lim\limits_{x\longrightarrow 1+} f(x) = \infty = \lim\limits_{x\longrightarrow\infty} f(x)$, y la función es continua en $(1, \infty)$; $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\longrightarrow 1-} f(x) = -\infty$, y la función es continua en $(-\infty, 0)$;
y es monótona en los intervalos que se citaron, la imagen es $(-\infty, 0) \cup [e^2, \infty)$.
Así pues, la gráfica de la función $f(x)$ será, aproximadamente, así:



b) Partimos de la función $f(x)$, continua y decreciente en $(1, 2]$ y con imagen $[e^2, \infty)$.
Por lo tanto, la función inversa tendría como dominio el intervalo $[e^2, \infty)$ y su imagen sería el intervalo $(1, 2]$.
La función inversa sería decreciente y tendría la asíntota horizontal $y = 1$ en ∞.

Por lo tanto, la gráfica de la función $f^{-1}(x)$ será, aproximadamente, así:



(2) **Sea** $f(x) = e^{bx} - e^x$**, con** $b \neq 1$**. Se pide:**

(a) Obtener el polinomio de Taylor de f de orden 2 centrado en el punto 0. ¿Para qué valores de b la función es creciente cerca de $x = 0$?¿Para qué valores de b la función es convexa cerca de $x = 0$?

(b) Supongamos $b = 2$. Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los extremos locales y globales. Calcular el valor aproximado de $f(0,1)$.

1 punto

---

a) En primer lugar, derivamos la función:
$f\,'(x) = be^{bx} - e^x$
$f"(x) = b^2 e^{bx} - e^x$
Evaluando la función y sus dos primeras derivadas en $x = 0$ se obtiene:
$f(0) = 0, f\,'(0) = b - 1, f"(0) = b^2 - 1.$
Por lo tanto, el polinomio de Taylor de orden 2 centrado en 0 correspondiente a dicha función es
$P(x) = f(0) + f\,'(0)x + \frac{1}{2}f"(0)x^2 = (b-1)x + \frac{1}{2}(b^2-1)x^2.$
La función es creciente cerca de $x = 0$ cuando lo es $P(x)$, es decir, cuando $b > 1$.
La función es convexa cerca de $x = 0$ cuando lo es $P(x)$, es decir, cuando $b^2 > 1 \Longleftrightarrow |b| > 1$.

b) Para $b = 2$ la función tiene como derivada
$f\,'(x) = 2e^{2x} - e^x = (2e^x - 1)e^x$
Como $f\,'(x) > 0 \Longleftrightarrow (2e^x - 1) > 0 \Longleftrightarrow e^x > \frac{1}{2} \Longleftrightarrow x > \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$
Se deduce que f es creciente en el intervalo $[-\ln 2, \infty)$, donde $f\,'$es positiva.
Análogamente, f es decreciente en el intervalo $(-\infty, -\ln 2]$, donde $f\,'$es negativa.
Por lo tanto, la función tiene un mínimo local y global en $x = -\ln 2$.
Por otro lado, $f(0,1) \simeq P(0,1) = 0,1 + \frac{3}{2}0,01 = 0,115.$

(3) **Sea $C(x) = 800 + x + 0'02x^2$ la función de costes y $p(x) = 50 - 0'05x$ la función (inversa) de demanda de una compañía monopolista. Se pide:**

(a) Hallar la producción x_0 que maximiza el beneficio de dicha compañía.

(b) Hallar la producción x_1 que minimiza el coste medio de dicha compañía.

Observación: justificar las respuestas.

1 punto

---

a) Como la función de beneficios es
$B(x) = I(x) - C(x) = 50x - 0'05x^2 - 800 - x - 0'02x^2 = -800 + 49x - 0'07x^2$
la producción x_0 que maximiza los beneficios será:
$B'(x_0) = 49 - 0'14x_0 = 0 \Longleftrightarrow x_0 = 350.$
Y, observando que la función de beneficios es cóncava, pues $B''(x) < 0$,
el punto crítico será el único maximizador global de los beneficios.

b) En primer lugar, como $\dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{800}{x} + 1 + 0'02x$. Derivando esta función, obtenemos:
$(\dfrac{C(x)}{x})' = -\dfrac{800}{x^2} + 0'02 = 0 \Longleftrightarrow x = 200$, luego el único punto crítico es $x_1 = 200$.
Y, observando que la función de costes medios es convexa, pues $(\dfrac{C(x)}{x})'' > 0$,
por tanto, el punto crítico será el único minimizador global de los costes medios.

(4) **Sean a, b números reales y consideremos la siguiente función definida a trozos**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax+3}{(1+x)^2} & \text{si } x < 0 \\ 3 & \text{si } x = 0 \\ b + \ln(x^2+1) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$ **. Se pide:**

(a) Discutir, según los valores a, b, cuando la función anterior es continua.

(b) Discutir, según los valores a, b, cuando la función anterior es derivable.

1 punto

---

a) Para cualquier valor a, b la función es discontinua en $x = -1$, pues no existe $f(-1)$.
Además, en $x = 0$ se cumple que:
$\lim_{x \longrightarrow 0-} f(x) = f(0) = 3$, $\lim_{x \longrightarrow 0+} f(x) = b$
luego, para cualquier a se cumple que $f(x)$ es continua en $x = 0$ cuando $b = 3$.
Por último, en los demás puntos del dominio la función es continua.

b) Desde luego, en $x = -1$ la función anterior no es derivable, pues no es continua.
Asimismo, si $x \neq 0, x \neq -1$, la función anterior es derivable en todos los puntos.
Por último, en $x = 0$, la función no es derivable si $b \neq 3$, pues no es continua.
Por tanto, estudiemos que pasa en el origen cuando $b = 3$.

$$\lim_{x \longrightarrow 0-} f\,'(x) = \lim_{x \longrightarrow 0-} \frac{a(x+1)^2 - (ax+3)2(x+1)}{(1+x)^4} = a - 6$$

$$\lim_{x \longrightarrow 0+} f\,'(x) = \lim_{x \longrightarrow 0+} \frac{2x}{1+x^2} = 0$$

Luego la función será derivable en $x = 0$ cuando $a = 6, b = 3$.

(5) **Dado $a > 0$, se considera el conjunto A limitado por la parábola $y = ax^2$, la recta $y = 4a(x-1)$ y el eje horizontal. Se pide:**

(a) Representar el conjunto A y hallar los maximales y minimales, máximo y mínimo de A, si existen.

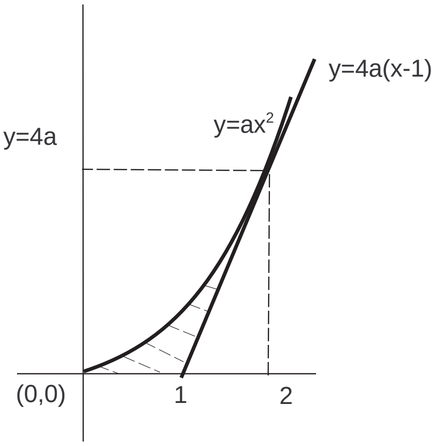
(b) Calcular el área del recinto anterior.

Sugerencia: el orden de Pareto viene dado por: $(x_0, y_0) \leq_P (x_1, y_1) \Longleftrightarrow x_0 \leq x_1, y_0 \leq y_1$.

1 punto

---

a) La recta $y = 4a(x-1)$ corta a la parábola en el punto $(2, 4a)$, pues
$ax^2 = 4a(x-1) \Longleftrightarrow x^2 = 4(x-1) \Longleftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Longleftrightarrow x = 2$,
y es tangente a dicha parábola en ese punto, pues la pendiente de la recta es $4a$, que coincide con la derivada de la parábola en el punto $(2, 4a)$.
Por otro lado, la recta $y = 4a(x-1)$ corta al eje horizontal en el punto $(1, 0)$.
Por lo tanto, el recinto acotado limitado por esas funciones tiene una forma, aproximadamente, así:



Obviamente, por el dibujo se deduce que
$\{\text{maximales}(A)\} = \{\text{máximo}(A)\} = \{(2, 4a)\}$
$\{\text{minimales}(A)\} = \{\text{mínimo}(A)\} = \{(0, 0)\}$

b) El área solicitada es la que queda debajo de la parábola en el intervalo $[0, 2]$, menos el área del triángulo formado por los puntos $(1, 0), (2, 0)$ y $(2, 4a)$.
Por lo tanto, él area pedida es:
$\int_0^2 ax^2 dx - \frac{1}{2}.1.4a = [a\dfrac{x^3}{3}]_0^2 - 2a = (\dfrac{8}{3} - 2)a = \frac{2}{3}a$ unidades de área.

(6) **Dada la función** $f(x) = \sqrt{x}(1-\sqrt{x})$, **se pide:**

(a) Hallar la ecuación de la primitiva $F(x)$ de $f(x)$ que cumpla que $F(1) = 1$.

(b) Supóngase ahora que $f(x) = g(x)(1-g(x))$ es una función definida en $[0, \infty)$, g continua y creciente, $g(0) = 0, g(1) = 1$.

Además, supongamos que f decreciente si $x > 4$ y tal que $f(4) = -2$.

Estudiar el crecimiento y decrecimiento de $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, probar que $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} F(x) = -\infty$ y dibujar aproximadamente $F(x)$.

Sugerencia para el límite del apartado b: si $x > 4, F(x) = F(4) + \int_4^x f(t)dt$.

1 punto

---

a) Haciendo el cambio de variable $t = u^2, dt = 2udu$,
se deduce que la primitiva de f será así:
$F(t) = \int \sqrt{t}(1-\sqrt{t})dt + C = \int u(1-u)2udu + C = \frac{2}{3}u^3 - \frac{1}{2}u^4 + C =$
$= \frac{2}{3}(\sqrt{t})^3 - \frac{1}{2}t^2 + C.$
Como $F(1) = 1$, se deduce que $1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + C \Longrightarrow C = \frac{5}{6}$.
Luego $F(x) = \frac{2}{3}(\sqrt{x})^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{6}$.

b) La derivada de $F(x)$ es:
$F'(x) = f(x) = g(x)(1-g(x))$.
Luego se deduce que $F'(x)$ es positiva en el intervalo $(0, 1)$ y negativa en el intervalo $(1, \infty)$.
Por lo tanto, F es creciente en el intervalo $[0, 1]$ y decreciente en el intervalo $[1, \infty)$.
Por último, si $x > 4, F(x) = F(4) + \int_4^x f(t)dt < F(4) - 2(x-4) \longrightarrow -\infty$ cuando $x \longrightarrow \infty$.
Así pues, $F(x)$ será, aproximadamente, así: