Universidad Carlos III de Madrid

Ejercicio	1	2	3	4	5	6	Total
Puntos							

Departamento de Economía **Examen Final de Matemáticas I** **16 de Enero de 2013**

Duración del Examen: 2 horas.

APELLIDOS:		**NOMBRE:**
DNI:	**Titulación:**	**Grupo:**

(1) **Sea la función** $f(x) = \ln(9 - x^2)$**. Se pide:**

(a) Representar la función, hallando previamente el dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, las asíntotas y la imagen de $f(x)$.

(b) Considera la función $f(x)$, restringida al intervalo $[0, 3)$. Halla la expresión analítica de $f^{-1}(x)$, indica su dominio e imagen y dibuja la gráfica de $f^{-1}(x)$.

1 punto

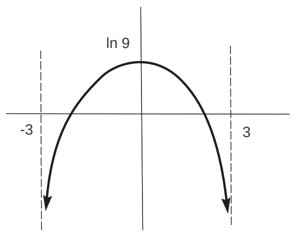
(a) El dominio de la función anterior es el intervalo $(-3, 3)$.

Por otro lado, como $f\,'(x) = \dfrac{-2x}{9 - x^2}$, se deduce que f es creciente en el intervalo $(-3, 0]$ y decreciente en el intervalo $[0, 3)$.

Para calcular las asíntotas de f, es suficiente tener en cuenta que: $\lim\limits_{x \longrightarrow -3^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 3^-} f(x) = \ln(0^+) = -\infty$, luego la función tiene asíntotas verticales en los puntos $x = -3, x = 3$.

Por otro lado, como su dominio es un intervalo acotado, no tiene asíntotas ni horizontales ni oblícuas.

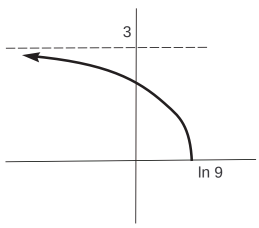
La imagen de la función es $(-\infty, f(0)] = (-\infty, \ln(9)]$, por la monotonía de f y sus asíntotas verticales. Por lo tanto, la gráfica de f tendrá un aspecto, aproximadamente, así:



(b) Consideremos la ecuación $y = \ln(9 - x^2)$, donde $0 \leq x < 3, -\infty < y \leq \ln 9$. Entonces, $y = \ln(9 - x^2) \iff e^y = 9 - x^2 \iff x^2 = 9 - e^y \iff x = \sqrt{9 - e^y}$. Luego $f^{-1}(x) = \sqrt{9 - e^x}$.

El dominio de $f^{-1}(x)$es $\underset{x \longrightarrow -\infty}{(-\infty}, \ln 9]$ y su imagen es $[0, 3)$.

Como la gráfica de $f^{-1}(x)$ es la simétrica de la gráfica de $f(x)$, considerándola definida solamente en el intervalo $[0, 3)$, $f^{-1}(x)$ es una función decreciente, con asíntota $y = 3$ en $-\infty$, y que alcanza su mínimo global en $x = \ln 9$, donde la función valdrá 0. Por lo tanto, la gráfica de f^{-1} tendrá un aspecto, aproximadamente, así:



(2) **Dada la función** $f(x) = e^x \ln(1-x)$,**se pide:**

(a) Hallar el polinomio de Taylor de segundo orden de $f(x)$, centrado en $a = 0$, y utilizarlo para obtener una aproximación del valor de $f(0,1)$.

(b) Calcular la ecuación de la recta tangente a f en el punto $x = 0$ y dibujar de forma aproximada la gráfica de f cerca del punto $x = 0$.

Sugerencia para b): para representar f solo es necesario hallar la recta tangente y utilizar el hecho de que $f"(0) < 0$.

1 punto

---

a) En primer lugar, calculamos la derivada primera y segunda de la función:

$f\ '(x) = e^x[\ln(1-x) - \dfrac{1}{1-x}]$

$f"(x) = e^x[\ln(1-x) - \dfrac{2}{1-x} - \dfrac{1}{(1-x)^2}]$

A continuación, sustituimos en el punto $x = 0$, y obtenemos que:

$f(0) = 0, f\ '(0) = -1, f"(0) = -3$

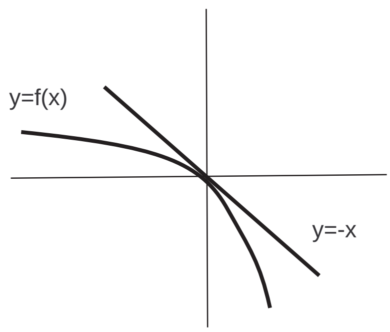
Luego el polinomio de Taylor de orden 2, centrado en a=0, será:

$P(x) = -x - \frac{3}{2}x^2$.

Por lo tanto, tenemos que $f(0,1) \approx P(0,1) = -0,1 - \frac{3}{2}(0,1)^2 = -0,1 - 0,015 = -0,115$.

b) La ecuación de la recta tangente será: $y = -x$.Además, como $f"(0) = -3 < 0$, la función f es cóncava cerca del punto $x = 0$.

Por lo tanto, la gráfica de f quedará debajo de la recta tangente y será, cerca del punto $x = 0$, aproximadamente así:



(3) **Sean $C(x) = 25.000 + 450x + 0,03x^2$ y $p(x) = 550 - 0,02x$ las funciones de coste y demanda (inversa), respectivamente, de una empresa monopolista. Se pide:**

(a) Hallar la producción x_0 y el precio p_0 donde la empresa alcanza su máximo beneficio. Hallar asimismo el beneficio máximo.

(b) Hallar la producción x_1 donde la empresa alcanza su máximo beneficio medio (o unitario), es decir, la producción que maximiza la función $B_{me}(x) = \dfrac{B(x)}{x}$.

Comparar el comportamiento, en lo referente a crecimiento y decrecimiento, de las funciones $B(x)$ y $\dfrac{B(x)}{x}$ en el intervalo $[x_0, x_1]$.

Observación para b): para simplificar las operaciones, puede tomarse 1,4 como aproximación de $\sqrt{2}$.

1 punto

---

a) La función de ingresos es $I(x) = 550x - 0,02x^2$, luego la función de beneficios será:
$B(x) = I(x) - C(x) = -0,02x^2 + 550x - (0,03x^2 + 450x + 25.000) =$
$= -0,05x^2 + 100x - 25000.$
Observamos que la función de beneficios es cóncava ($B"(x) = -0,1 < 0$).
Por tanto, el punto crítico, si existe, será el único maximizador global.
Como $B'(x) = -0,1x + 100 = 0 \iff x = 1.000$.
Luego dicha producción es la que maximiza el beneficio.
Análogamente, el precio que maximiza el beneficio es $p = 550 - 0,02.1000 = 530$.
Finalmente, el beneficio máximo es $B(1.000) = -50.10^3 + 100.10^3 - 25.10^3 = 25.000$

b) En primer lugar, la función de beneficios medios es $\dfrac{B(x)}{x} = -0,05x + 100 - \dfrac{25.000}{x}$
Como la función es cóncava $((\dfrac{B(x)}{x})" = \dfrac{-5.000}{x^3} < 0$), el punto crítico, si existe, será el único maximizador global.
Así pues, $(\dfrac{B(x)}{x})' = -0,05 + \dfrac{25.000}{x^2} = 0 \iff$
$\iff x^2 = \dfrac{25.000}{0,05} = \dfrac{2.500.000}{5} = 50.10^4 \iff x_0 = 500\sqrt{2} \approx 700$
luego dicha producción es la que maximiza el beneficio medio.
Finalmente, ¿que sucede en el intervalo $[x_0, x_1] = [700, 1000]$? Pues lo siguiente:
i) los beneficios siguen aumentando, ya que $B'(x) > 0$. Sin embargo,
ii) los beneficios por unidad disminuyen, ya que $(\dfrac{B(x)}{x})' < 0$.

ANEXO SOLUCIONES PARA LOS PROBLEMAS 1, 2 Y 3

4. **Sea** $f(x) = \begin{cases} ax+1 & si\ x \leq -1 \\ x^2+b & si\ \ x > -1 \end{cases}$ **y consideremos el intervalo** $[-2,3]$ **. Se pide:**

(a) Determinar a y b para que $f(x)$ satisfaga las hipótesis (o condiciones iniciales) del teorema de Lagrange en dicho intervalo.

(b) Supongamos que $2a+b=-2, a \neq -2$. Determinar, si existe(n), el valor o valores c de forma que se cumpla la tesis (o conclusión) de dicho teorema.

Sugerencia para ambos apartados: enunciar el teorema del valor medio (o de Lagrange).

1 punto

---

a) Según el teorema de Lagrange, se requiere que la función sea continua en $[-2,3]$ y derivable en $(2,3)$.

Obviamente, el único punto que hay que estudiar es $x=-1$. Por lo tanto:

i) $f(x)$ es continua en $x=-1 \Longleftrightarrow -a+1=1+b$.

ii) $f(x)$ es derivable en $x=-1 \Longleftrightarrow f(x)$ es continua en dicho punto y $a=-2$.

Luego $f(x)$ satisface las hipótesis del teorema de Lagrange cuando $a=-2, b=2$.

b) Como $a \neq -2$, no se cumplen las hipótesis del teorema. Sin embargo, puede suceder que sí se cumpla la tesis.

En este caso, como $f(3)-f(-2)=9+b-(-2a+1)=8+2a+b=6$, pues

$2a+b=-2$, la tesis del teorema de Lagrange afirma que existe c en el intervalo

$(-2,3)$ de forma que:

$f(3)-f(-2)=6=f\,'(c)(3-(-2)) \Longleftrightarrow f\,'(c)=\frac{6}{5}$; y, como la función derivada, aunque no exista en el punto $x=-1$, satisface que:

$$f'(x) = \begin{cases} a & si\ x < -1 \\ 2x & si\ \ x > -1 \end{cases}$$

se obtienen dos casos:

i) $a \neq \frac{6}{5} \Longrightarrow$ el único punto c que satisface la tesis será el $x>-1$ tal que $2x=\frac{6}{5} \Longleftrightarrow x=\frac{3}{5}$.

ii) $a=\frac{6}{5} \Longrightarrow$ los puntos c que satisfacen la tesis serán los del conjunto $(-2,-1) \cup \{\frac{3}{5}\}$.

Sugerencia.

Teorema de Lagrange: Sea $g:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b).

Entonces, existe un punto c en el intervalo (a,b) de forma que: $g(b)-g(a)=g'(c).(b-a)$

5. **Sea A el conjunto comprendido entre las gráficas de las funciones $f(x) = -x^2 + 3x + 4$ y $g(x) = x^2 - x - 2$. Se pide:**

(a) Representar el conjunto A y hallar los maximales y minimales, máximo y mínimo de A, si existen, con el orden de Pareto.

(b) Calcular el área del recinto anterior.

Sugerencia: el orden de Pareto viene dado por: $(x_0, y_0) \leq_P (x_1, y_1) \Longleftrightarrow x_0 \leq x_1, y_0 \leq y_1$.

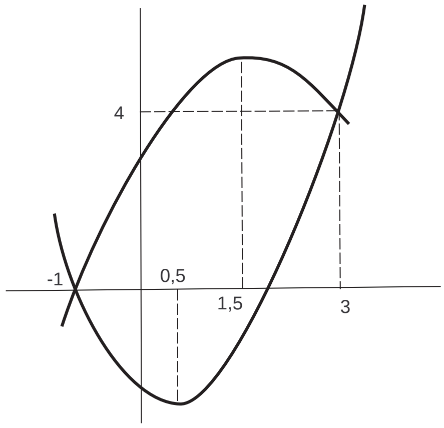
1 punto

---

a) Como $f(x) = g(x)$ equivale a $x = -1, x = 3, f(x)$ es cóncava y $g(x)$ es convexa, el recinto está limitado superiormente por la función $f(x)$ e inferiormente por la función $g(x)$, funciones que se cortan en los puntos $(-1, 0)$ y $(3, 4)$.

Como $f\,'(x) = -2x + 3 > 0 \Longleftrightarrow x < \frac{3}{2}$, esto significa que la función $f(x)$ es creciente en el intervalo $[-1, \frac{3}{2}]$ y decreciente en $[\frac{3}{2}, 3]$. Análogamente, como la función $g\,'(x) = 2x - 1 > 0 \Longleftrightarrow x > \frac{1}{2}$, esto significa que la función $g(x)$ es decreciente en el intervalo $[-1, \frac{1}{2}]$ y creciente en $[\frac{1}{2}, 3]$.

Por lo tanto, el recinto tiene una forma así: $-$



Obviamente, $máximo(A)$ no existe, pues $\{\text{maximales}(A)\} = \{(x, f(x)) : \frac{3}{2} \leq x \leq 3\}$.

Análogamente, $mínimo(A)$ no existe, pues $\{\text{minimales}(A)\} = \{(x, g(x)) : -1 \leq x \leq \frac{1}{2}\}$.

b) El área solicitada es:

$\int_{-1}^{3} (f(x) - g(x))dx = \int_{-1}^{3} (-2x^2 + 4x + 6)dx = [-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 + 6x]_{-1}^{3} = 18 - (\frac{2}{3} + 2 - 6) =$

$= 21 + \frac{1}{3} = \frac{64}{3}$ unids área.

6. **Dada la función** $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-3x+2}$, **se pide:**

(a) Calcular, si existe, la primitiva de dicha función en el intervalo $(-\infty, 1)$ que cumpla $F(0) = 0$.

(b) Consideremos el intervalo $(2, \infty)$ y la primitiva $F(x)$ de $f(x)$ que cumple $F(3) = 0$.Representar dicha primitiva.

Sugerencia: para el apartado b) es suficiente hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $F(x)$, extremos globales y los límites de $F(x)$ en 2^+ y ∞. No es necesario estudiar la existencia de asíntotas en ∞.

1 punto

---

a) Como $f(x)$ es una función racional, calculamos su primitiva indefinida mediante el método de fracciones simples.

Así pues, como $x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$, $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-3x+2} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x-2} \Longleftrightarrow$
$\Longleftrightarrow x-3 = A(x-2) + B(x-1)$. Y ahora, si $x = 1 \Longrightarrow A = 2$; y si $x = 2 \Longrightarrow B = -1$.

Luego, en cualquiera de esos intervalos, $F(x) = \int f(x)dx = 2\ln|x-1| - \ln|x-2| + C$.

En particular, en el intervalo $(-\infty, 1)$,
$F(0) = -\ln 2 + C = 0 \Longrightarrow F(x) = 2\ln|x-1| - \ln|x-2| + \ln 2$.

b) Por el teorema fundamental del cálculo se cumple que $F'(x) = f(x)$. Por tanto, se verifica que:

i) $F(x)$ es creciente en el intervalo $[3, \infty)$, pues en dicho intervalo $F'(x) = f(x) > 0$.

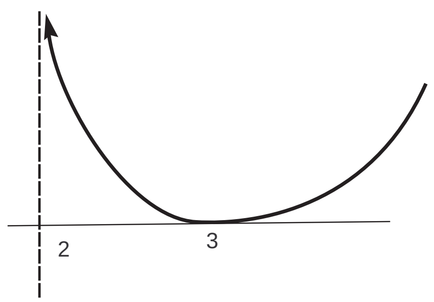
ii) $F(x)$ es decreciente en el intervalo $(2, 3]$, pues en dicho intervalo $F'(x) = f(x) < 0$.

Luego $F(x)$ alcanza un mínimo global en $x = 3$.

Por otro lado, como $F(x) = 2\ln|x-1| - \ln|x-2| + C$, se cumple que $\lim\limits_{x\to 2+} F(x) = \infty$.

Finalmente, observando que $F(x) = \ln[\dfrac{(x-1)^2}{x-2}] + C$,se cumple que
$\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \ln\infty + C = \infty$.

Por lo tanto, la gráfica de $F(x)$ será, teniendo en cuenta que $F(3) = 0$, así:



ANEXO SOLUCIONES PARA LOS PROBLEMAS 4, 5 Y 6