Universidad Carlos III de Madrid

Ejercicio	1	2	3	4	5	6	Total
Puntos							

Departamento de Economía **Examen Final de Matemáticas I** **13 de Enero de 2012**

Duración del Examen: 2 horas.

APELLIDOS: **NOMBRE:**

DNI: **Titulación:** **Grupo:**

(1) **Sea la función** $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$ **. Se pide:**

(a) Hallar el dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los máximos y mínimos, locales y globales, de $f(x)$.

(b) Hallar todas las asíntotas de f, la imagen (o recorrido) de esta función f y dibujar la gráfica de f.

1 punto

---

a) El dominio de la función anterior es toda la recta real menos el punto $x = 0$, donde se anula el denominador.

Es decir, Dominio $(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Por otro lado, como $f\,'(x) = \dfrac{e^x(e^x-1) - e^x.e^x}{(e^x-1)^2} = \dfrac{-e^x}{(e^x-1)^2} < 0$,

se deduce que f es decreciente en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $(0, \infty)$.

Por lo tanto, no es creciente en ningún intervalo, ni tampoco tiene ningún máximo ni mínimo, local o global.

b) Para calcular las asíntotas de f, es suficiente tener en cuenta que:

$\lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} \dfrac{e^x}{e^x-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{e^x}{e^x-1} = \frac{1}{0^+} = \infty$

Luego la función tiene asíntotas verticales en el punto $x = 0$. Por otro lado,

$\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \dfrac{e^x}{e^x-1} = \frac{0}{-1} = 0$

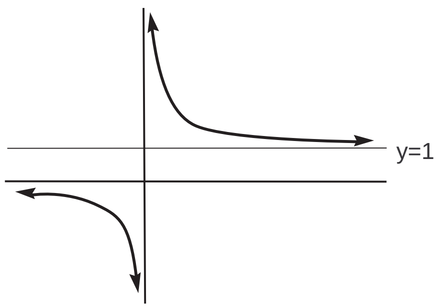
$\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{e^x}{e^x-1} = \frac{\infty}{\infty} = (L'Hopital) = \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{e^x}{e^x} = 1;$

Es decir, f tiene asíntotas horizontales $y = 0$ en $-\infty$ y $y = 1$ en $+\infty$.

Por tanto, teniendo en cuenta que la función es decreciente y continua en sus intervalos de definición, la imagen será:

Im(f)= $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$.

En definitiva, la gráfica de f será, aproximadamente, así:



(2) **Sea $y = f(x)$ la función definida de forma implícita, mediante la ecuación $e^{x+y} + x^2y = e$, en un entorno del punto $x = 0, y = 1$. Se pide:**

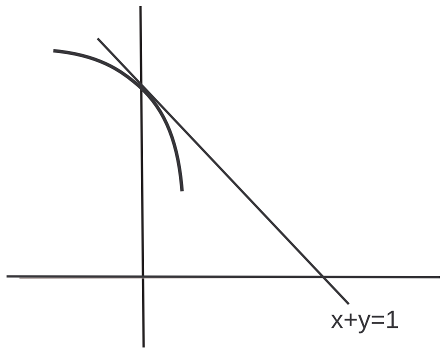
(a) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $x = 0, y = 1$.

(b) Calcular $f"(0)$ y representar aproximadamente la gráfica de f cerca del punto $x = 0, y = 1$.
Sugerencia: para representar f solo es necesario el apartado a) y utilizar el hecho de que $f"(0) < 0$.
1 punto

---

a) En primer lugar, derivamos la ecuación que define a la función de forma implícita:
$e^{x+y}(1 + y') + 2xy + x^2y' = 0$
A continuación, sustituimos en el punto $x = 0, y = 1$, y obtenemos que
$e(1 + y') = 0 \Longrightarrow y' = -1$
Luego la ecuación de la recta tangente será: $y - 1 = -(x - 0)$ o $x + y = 1$.

b) Derivando por segunda vez la ecuación que define (implícitamente) a la función, obtenemos que:
$e^{x+y}(1 + y')^2 + e^{x+y}y" + 2y + 2xy' + 2xy' + x^2y" = 0$
A continuación, sustituimos en el punto $x = 0, y = 1, y' = -1$ y obtenemos que
$ey" + 2 = 0 \Longrightarrow y" = \dfrac{-2}{e} < 0$
luego la función f es cóncava cerca del punto $x = 0$.
Por lo tanto, la gráfica de f será, cerca del punto $x = 0$, aproximadamente así:



(3) **Sean $C(x) = C_0 + 10x + 0,03x^2$ y $p(x) = 50 - 0,01x$ las funciones de coste y demanda, respectivamente, de una empresa monopolista. Se pide:**

(a) Hallar la producción x_0 donde la empresa alcanza su máximo beneficio.

(b) Hallar el coste fijo C_0 de forma que la producción que minimice el coste medio sea $x = 200$.

Observación: justificar las respuestas.

1 punto

---

a) La función de ingresos es $I(x) = 50x - 0,01x^2$, luego la función de beneficios será:
$B(x) = I(x) - C(x) = -0,01x^2 + 50x - (0,03x^2 + 10x + C_0) = -0,04x^2 + 40x - C_0$.
Observamos que la función de beneficios es cóncava ($B''(x) < 0$).
Por tanto, el punto crítico, si existe, será el único maximizador global.
Como $B'(x) = -0,08x + 40 = 0 \Longleftrightarrow x = \dfrac{40}{0,08} = 500$, dicha producción es la que maximiza el beneficio.

b) En primer lugar, la función de costes medios es $\dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{C_0}{x} + 10 + 0,03x$.
Como la función es convexa $((\dfrac{C(x)}{x})'' > 0$), el punto crítico, si existe, será el único minimizador global.
Así pues, $(\dfrac{C(x)}{x})' = -\dfrac{C_0}{x^2} + 0,03 = 0 \Longleftrightarrow x^2 = \dfrac{C_0}{0,03} \Longleftrightarrow C_0 = 0,03.200^2 = 1.200$,
dicha producción es la que minimiza el coste medio.

ANEXO SOLUCIONES PARA LOS PROBLEMAS 1, 2 Y 3

4. **Sea** $0 < a < 1$ **y consideremos la función** $f : [a, \dfrac{1}{a}] \to \mathbb{R}$, **definida por** $f(x) = \dfrac{1}{x}$ **. Se pide:**

(a) Enunciar el teorema del valor medio (o de Lagrange) en condiciones generales.

(b) Determinar el valor c de forma que se cumpla la tesis (o conclusión) de dicho teorema para la función particular definida al principio del problema.

1 punto

---

a) Sea $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b).
Entonces, existe un punto c en el intervalo (a, b) de forma que:
$g(b) - g(a) = g'(c).(b - a)$

b) Tomando $g(x) = f(x) = \frac{1}{x}, a = a, b = \frac{1}{a}$, se deduce que existe c en el intervalo $(a, \frac{1}{a})$ de forma que:
$a - \dfrac{1}{a} = -\dfrac{1}{c^2}(\dfrac{1}{a} - a) \iff \dfrac{1}{c^2} = 1$; y, como el punto c debe pertenecer al intervalo $(a, \frac{1}{a})$, debe ser positivo, luego $c = 1$.

5. **Sea el conjunto** $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{4}{9}x^2 \leq y \leq \frac{4}{3}\sqrt{3x}\}$ **. Se pide:**

(a) Representar el conjunto A y hallar los maximales y minimales, máximo y mínimo de A, si existen.

(b) Calcular el área del recinto anterior.

Sugerencia: el orden de Pareto viene dado por: $(x_0, y_0) \leq_P (x_1, y_1) \iff x_0 \leq x_1, y_0 \leq y_1$.

1 punto

---

a) El recinto está contenido en el primer cuadrante, y limitado por las curvas $y = \frac{4}{9}x^2, y = \frac{4}{3}\sqrt{3x}$.

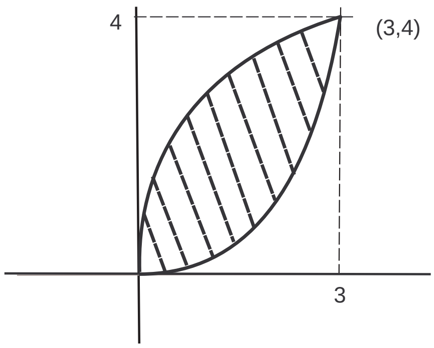
Los puntos de corte (x,y) de estas dos curvas satisfacen:

$\frac{4}{9}x^2 = \frac{4}{3}\sqrt{3x} \Longrightarrow x^2 = 3\sqrt{3x} \Longrightarrow x^4 = 27x \Longrightarrow$

i) $x = 0 \Longrightarrow y = 0$, luego el punto de corte sería $(0,0)$; o bien

ii) $x^3 = 27 \Longrightarrow x = 3 \Longrightarrow y = 4$, luego el punto de corte sería $(3,4)$.

Por lo tanto, el recinto tiene una forma así:



Obviamente, $\textit{máximo}(A) = \{\text{maximales}(A)\} = \{(3,4)\}$.

$\textit{Mínimo}(A) = \{\text{minimales}(A)\} = \{(0,0)\}$.

b) El área solicitada es:

$\int_0^3 (\frac{4}{3}\sqrt{3x} - \frac{4}{9}x^2)dx = [\frac{4}{3}\sqrt{3}\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{4}{9}\frac{x^3}{3}]_0^3 = 8 - 4 = 4$ unids área.

6. **Dada la función** $F(x) = \int_3^x f(t)dt$**, definida para** $x \in [3,5]$**, siendo** $f : [3,5] \longrightarrow \mathbb{R}$ **una función estrictamente decreciente y continua, con valores** $f(3) = 1, f(4) = 0, f(5) = -1$**, se pide:**

(a) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y estudiar la existencia de máximos y mínimos globales de $F(x)$.

(b) Calcular la mejor estimación posible, por defecto y por exceso, de $F(5) = \int_3^5 f(t)dt$.

Sugerencia: en el apartado a) quizás no sea posible determinar con seguridad algún extremo global: en dicho caso, hay que razonar justificadamente todo lo que se pueda decir de $F(x)$.

1 punto

---

a) Por el teorema fundamental del cálculo tenemos que $F'(x) = f(x)$. Por tanto, se verifica que:
i) $F(x)$ es creciente en el intervalo $[3,4]$, pues en dicho intervalo $F'(x) = f(x) > 0$.
ii) $F(x)$ es decreciente en el intervalo $[4,5]$, pues en dicho intervalo $F'(x) = f(x) < 0$.
Luego $F(x)$ alcanza un máximo global en $x = 4$.
Por otro lado, $F(x)$ alcanzará un mínimo global en $x = 3$ o en $x = 5$ o en ambos puntos, dependiendo de si $F(3)$ es menor, mayor o igual a $F(5)$.

b) Como $F(5) = \int_{\mathbf{3}}^{\mathbf{4}} \mathbf{f(t)dt} + \int_{\mathbf{4}}^{\mathbf{5}} \mathbf{f(t)dt}$, se cumple que:

$0 = 1 \cdot 0 \leq \int_{\mathbf{3}}^{\mathbf{4}} \mathbf{f(t)dt} \leq \mathbf{1 \cdot 1 = 1}$, pues $0 \leq f(t) \leq 1$ cuando $3 \leq t \leq 4$; y

$-1 = 1 \cdot (-1) \leq \int_{\mathbf{4}}^{\mathbf{5}} \mathbf{f(t)dt} \leq \mathbf{1 \cdot 0 = 0}$, pues $-1 \leq f(t) \leq 0$ cuando $4 \leq t \leq 5$.

Por tanto, sumando ambas desigualdades, obtenemos que:

$-1 \leq \mathbf{F(5)} \leq \mathbf{1}$

ANEXO SOLUCIONES PARA LOS PROBLEMAS 4, 5 Y 6