Universidad Carlos III de Madrid

Ejercicio	1	2	3	4	5	6	total
Puntos							

Departamento de Economía **Examen Final de Matemáticas I** **14 de Enero de 2011**

Duración del Examen: 2 horas.

APELLIDOS: **NOMBRE:**

DNI: **Titulación:** **Grupo:**

1. Sea la función $f(x) = \begin{cases} 2-4(x-4)^2 & si\ 3 \leq x \leq 4 \\ 2+4(x-4)^2 & si\ \ 4 \leq x \leq 5 \end{cases}$ **. Se pide:**

a) Hallar la imagen (o recorrido) de f y calcular la función f^{-1}, inversa de f.

b) Representar la función inversa f^{-1}, precisando su dominio e imagen.

Sugerencia: dibujar la gráfica de f, estudiando si es creciente o decreciente.

1 punto

---

a) La función anterior es continua y creciente, tomando los valores $f(3) = -2, f(5) = 6$.

Por lo tanto, la imagen es $[-2, 6]$.

En cuanto a la inversa de f, consideramos primero f definida en el intervalo [3,4], cuya imagen es el intervalo [-2,2].

$$y = 2-4(x-4)^2 \Longleftrightarrow (x-4)^2 = \frac{2-y}{4} \Longleftrightarrow x-4 = -\sqrt{\frac{2-y}{4}} \Longleftrightarrow x = 4 - \frac{\sqrt{2-y}}{2};$$

Es decir, $f^{-1}(x) = 4 - \dfrac{\sqrt{2-x}}{2}$, cuando $x \in [-2, 2]$.

Análogamente, consideramos f definida en el intervalo [4,5], cuya imagen es el intervalo [2,6].

$$y = 2+4(x-4)^2 \Longleftrightarrow (x-4)^2 = \frac{y-2}{4} \Longleftrightarrow x-4 = \sqrt{\frac{y-2}{4}} \Longleftrightarrow x = 4 + \frac{\sqrt{y-2}}{2};$$

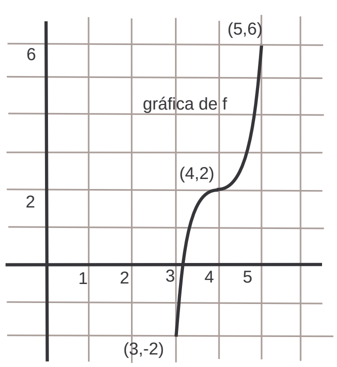
Es decir, $f^{-1}(x) = 4 + \dfrac{\sqrt{x-2}}{2}$, cuando $x \in [2, 6]$.

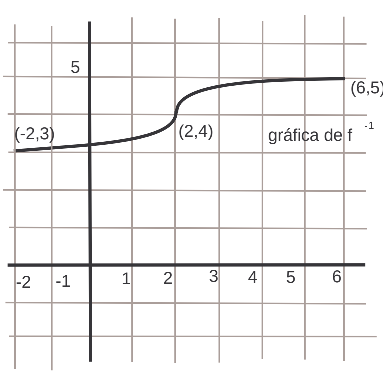
En definitiva, $f^{-1}(x) = \begin{cases} 4 - \dfrac{\sqrt{2-x}}{2} & si\ \ -2 \leq x \leq 2 \\ 4 + \dfrac{\sqrt{x-2}}{2} & si\ \ 2 \leq x \leq 6 \end{cases}$

b) Para representar la gráfica de f^{-1}, es suficiente tener en cuenta que, como f es creciente, también lo será su inversa.

Además, debe tenerse en cuenta que el dominio de la inversa es el intervalo [-2,6], su imagen es [3,5], $f(2) = 4$, y que como f es cóncava en el intervalo [3,4] y convexa en el intervalo [4,5], f^{-1} es convexa en el intervalo [-2,2] y cóncava en el intervalo [2,6].

Por lo tanto, la gráfica de f^{-1} será. aproximadamente, así:





2. Sea a un número real y consideremos la función siguiente

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{1+x^2}, & \text{si } x < 0 \\ a, & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) Indicar, razonadamente, los valores de a, si existen, para que la función anterior sea continua y / o derivable en $x = 0$.

b) Calcular sus asíntotas verticales, horizontales y oblicuas, para todos los valores de a.

1 punto

---

a) En primer lugar, estudiamos si la función es continua en el punto $x = 0$. Para ello, observamos que $\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = 0$, $f(0) = a$, $\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = \frac{0}{0} = (L'Hopital) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{2x}{x^2+1} = 0$;
Es decir, f es continua en $x = 0$ cuando $a = 0$.

Y ahora, suponiendo que $f(x)$ es continua en $x = 0$, $f(x)$ es derivable en $x = 0$ cuando $\lim_{x \longrightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} f'(x)$. Ahora bien:
$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^-} \dfrac{3x^2(1+x^2) - x^3 2x}{(1+x^2)^2} = 0.$
Por otro lado, $\lim_{x \longrightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{[2x/(x^2+1)]x - \ln(x^2+1)}{x^2} = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{[2x/(x^2+1)]x}{x^2} - \lim_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x^2}$
; calculemos ambos límites:
$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{[2x/(x^2+1)]x}{x^2} = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{2}{x^2+1} = 2$.Y, en cuanto al otro límite
$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x^2} = \frac{0}{0} = (L'Hopital) = \lim_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{2x/(x^2+1)}{2x} = 1.$
Luego se obtiene que $\lim_{x \longrightarrow 0^+} f'(x) = 1$.

Por lo tanto, se deduce que $f(x)$ nunca es derivable en $x = 0$.

b) Obviamente, no existen asíntotas verticales.Veamos si existen asíntotas en el infinito:
$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \dfrac{x^3}{(1+x^2)x} = 1,$
$\lim_{x \longrightarrow -\infty} f(x) - x = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \dfrac{x^3}{1+x^2} - \dfrac{x(1+x^2)}{1+x^2} = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \dfrac{-x}{1+x^2} = 0$
Luego la función tiene una asíntota oblicua $y = x$ en $-\infty$.
$\lim_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x} = \dfrac{\infty}{\infty} = \lim_{x \longrightarrow \infty} \dfrac{2x}{x^2+1} = 0$
Luego la función tiene una asíntota horizontal $y = 0$ en ∞.

3. Sea la ecuación $x + e^{4x} = b$. Se pide:

a) Probar que dicha ecuación siempre tiene una solución única.

b) Hallar, para el caso $b = 0$ dicha única solución con un error menor de $0,25$ en valor absoluto.

Sugerencia: el número e está comprendido entre 2 y 3.

1 punto

---

a) La función $f(x) = x + e^{4x}$ siempre es creciente, pues su derivada $f'(x) = 1 + 4e^{4x} > 0$.

Por tanto, la solución, si existe es única.

Como además la función es continua y se cumple que

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$,

dicha solución siempre existe y es única.

b) En primer lugar, probamos con $f(0) = 1 > 0$.Luego, como la función es creciente, debemos buscar la raíz a la izquierda de dicho punto.

Como $f(-1) = -1 + e^{-4} = -1 + \dfrac{1}{e^4} < -1 + \frac{1}{16} < 0$, la raíz se debe encontrar en el intervalo [-1,0].

Finalmente, probamos en el punto intermedio de dicho intervalo. Como $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} + \dfrac{1}{e^2} < -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} < 0$,

la raíz se encuentra en el intervalo $(-\frac{1}{2}, 0)$, tomando como valor aproximado de la raíz $x = -\frac{1}{4}$, el error cometido es, en valor absoluto, menor de $0,25$.

4. **Sea la función** $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si\ x < 0 \\ 1 - 2x & si\ \ 0 \le x \end{cases}$ **, y consideramos la función** $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, **donde** $a < b$ **son números reales. Se pide:**

a) Enunciar el teorema de Weierstrass y determinar los valores a y b de forma que se cumplan las hipótesis (o condiciones iniciales) de dicho teorema.

b) Determinar los valores a y b de forma que NO se cumplan las hipótesis y se cumpla la tesis (o conclusión) de dicho teorema.

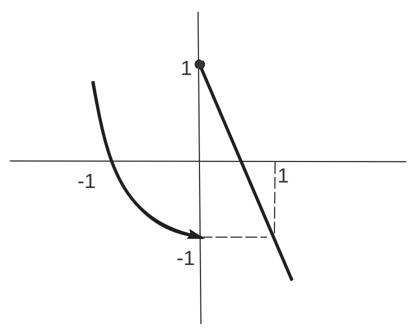
Sugerencia: representar la función.

1 punto

---

a) La función dada satisface las hipótesis del teorema cuando es continua.
Ahora bien, como la función anterior solo es discontinua en el punto 0 por la izquierda, entonces se satisfacen las hipótesis cuando $0 \le a$ o cuando $b < 0$.

b) Por un lado, no se satisfacen las hipótesis cuando la función es discontinua, es decir, cuando $a < 0 \le b$.
Por otro lado, para cualquier valor de a y b la función siempre tiene un máximo global.
Por lo tanto, debemos considerar en que casos la función es discontinua y alcanza su mínimo global.
Teniendo en cuenta que la función solo es discontinua en el 0 por la izquierda, que
$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1 < f(0)$, y que $f(x) \le -1 \iff x \ge 1$
entonces, $f(x)$ discontinua cumple la tesis del teorema cuando $a < 0 < 1 \le b$.
Un vistazo a la gráfica de la función ayudará a entender la situación.



5. **Sea el conjunto** $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 2x + 1 \leq y \leq -x^2 + 2x + 1\}$ **. Se pide:**

a) Dibujar el conjunto A y hallar los maximales y minimales, máximo y mínimo de A, si existen.

b) Calcular el área del recinto anterior.

Sugerencia: el orden de Pareto viene dado por: $(x_0, y_0) \leq_P (x_1, y_1) \Longleftrightarrow x_0 \leq x_1, y_0 \leq y_1$.

1 punto

---

a) $f(x) = x^2 - 2x + 1$ describe una parábola convexa cuyo vértice es el punto $(1, 0)$, pues $f\ '(1) = 0,\ f(1) = 0, f"(1) > 0$.

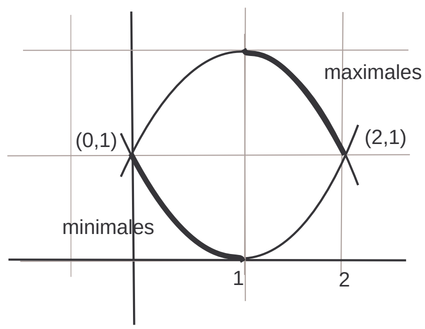
$g(x) = -x^2 + 2x + 1$ describe una parábola cóncava cuyo vértice es el punto $(1, 2)$, pues $g\ '(1) = 0,\ g(1) = 2, g"(1) < 0$.

Los puntos de intersección de ambas parábolas son los (x, y) tales que x satisfacen:

$x^2 - 2x + 1 = -x^2 + 2x + 1 \Longleftrightarrow 2x^2 = 4x \Longleftrightarrow x = 0, x = 2$.

Luego los puntos de corte son: $(0, 1), (2, 1)$.

Por lo tanto, el recinto tiene una forma así:



Obviamente, $máximo(A), mínimo(A)$ no existen, pues

maximales(A)= $\{(x, y) : y = -x^2 + 2x + 1, 1 \leq x \leq 2\}$

minimales(A)= $\{(x, y) : y = x^2 - 2x + 1, 0 \leq x \leq 1\}$.

b) El área solicitada es:

$$\int_0^2 [(-x^2 + 2x + 1) - (x^2 - 2x + 1)]dx = \int_0^2 (-2x^2 + 4x)dx = \left[\frac{-2x^3}{3} + \frac{4x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{-16}{3} + 8 =$$

$= \dfrac{8}{3}$ unids área.

6. **Dada la función** $F(x) = \int_{-2}^{x} t^3 e^{-t^2} dt$**, definida para** $x \in [-2, 2]$**, se pide:**

a) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los máximos y mínimos, locales y absolutos, de $F(x)$.

b) Hallar los intervalos de concavidad y convexidad, así como los puntos de inflexión, de la función $F(x)$.

Sugerencia: no es necesario ni recomendable hallar la primitiva de $f(x) = x^3 e^{-x^2}$.

1 punto

---

a) Por el teorema fundamental del cálculo tenemos que $F'(x) = x^3 e^{-x^2}$. Por tanto, se verifica que:
$F'(x) < 0 \iff x < 0; F'(x) > 0 \iff x > 0$.
Luego $F(x)$ es decreciente en el intervalo $(-2, 0)$ y creciente en el intervalo $(0, 2)$.
Así pues, $F(x)$ alcanza un mínimo local y global en $x = 0$.
En cuanto al máximo de $F(x)$, basta observar que $f(x) = x^3 e^{-x^2}$ es una función impar, luego $\int_{-2}^{0} t^3 e^{-t^2} dt = -\int_{0}^{2} t^3 e^{-t^2} dt$ **;** por lo tanto, se deduce que $F(-2) = 0 = F(2)$.
Es decir, $F(x)$ alcanza su máximo global en los puntos $x = -2, x = 2$.

b) Como $F"(x) = f\,'(x) = x^2(-2x^2 + 3)e^{-x^2}$, se cumple que:
$F"(x) = 0 \iff x = 0, x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$; es decir, estos son los puntos de inflexión, pues
$F"(x) < 0 \iff x \in (-2, -\sqrt{\frac{3}{2}}) \cup (\sqrt{\frac{3}{2}}, 2)$; es decir, estos son los intervalos de concavidad; y
$F"(x) > 0 \iff x \in (-\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}})$; es decir, este es el intervalo de convexidad.
Por tanto, la gráfica de F tiene una forma así: