Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía **Examen Final de Matemáticas I** **22 de Enero de 2010**

Duración del Examen: 2 horas.

APELLIDOS:		**NOMBRE:**
DNI:	**Titulación:**	**Grupo:**

1. Sea la función $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$. Se pide:

a) Hallar los intervalos de crecimiento/decrecimiento de f, así como sus extremos locales y/o globales.

b) Hallar las asíntotas de f, y representar la función.

1 punto

---

a) Para estudiar el crecimiento derivamos la función y estudiamos su signo:

$f\,'(x) = (\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-1})' = \dfrac{(2x/2\sqrt{x^2+1})(x-1) - \sqrt{x^2+1}}{(x-1)^2} = \dfrac{x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2\sqrt{x^2+1}} =$

$= \dfrac{-x-1}{(x-1)^2\sqrt{x^2+1}}$, luego observamos que su signo viene determinado por el signo de $x+1$ pues el denominador siempre es positivo. De donde obtenemos que:

$f\,' > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1)$, luego f es creciente en $(-\infty, -1)$.

$f\,' < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 1) \cup (1, \infty)$, luego f es decreciente en $(-1, 1)$ y en $(1, \infty)$.

En cuanto a los extremos locales, sabemos que el único posible es $x = -1$, pues es el único punto donde se anula la derivada. Además, f alcanza un máximo local en $x = -1$, pues satisface la condición necesaria de extremo $f\,'(-1) = 0$ y, por el párrafo anterior, también la suficiente del cambio de signo de $f\,'$.

En cuanto a los extremos globales $x = -1$ no puede ser un máximo global, pues $f(-1) < 0 < f(2)$.

b) Para calcular sus asíntotas verticales observamos que el dominio de la función es $\mathbb{R} - \{1\}$, si hacemos el límite por la derecha obtenemos $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-1} = \dfrac{\sqrt{2}}{0^+} = \infty$. Análogamente por la izquierda $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-1} = \dfrac{\sqrt{2}}{0^-} = -\infty$. Por lo tanto f tiene a $x = 1$ como asíntota vertical.

Para las horizontales, si hacemos el límite hacia ∞ obtenemos que

$\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$ =(dividiendo númerador y denominador por x) =

$= \lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{1+1/x^2}}{1-1/x} = 1.$

Por lo tanto f tiene asíntota horizontal $y = 1$ en ∞.

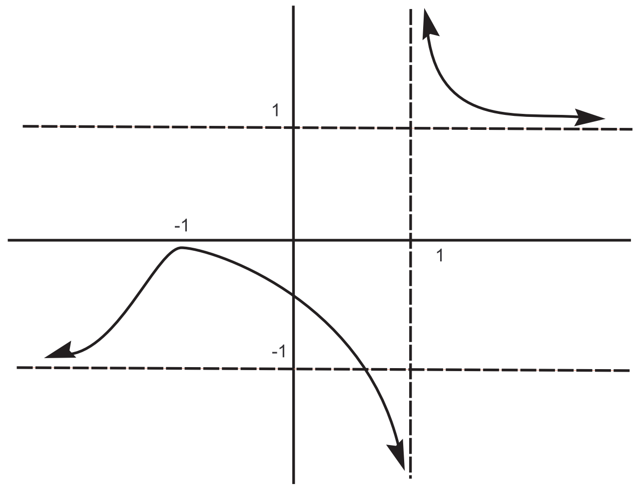
Hallando ahora el límite hacia $-\infty$ de f obtenemos que

$\lim_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$ =(dividiendo númerador y denominador por $-x$, que pasa dentro de la raíz como x^2) $= \lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{1+1/x^2}}{-1+1/x} = -1.$

Por lo tanto, f tiene asíntota horizontal $y = -1$ en $-\infty$.

Obviamente, como hay dos asíntotas horizontales, no puede haber asíntotas oblícuas en este caso.

En cuanto a la gráfica, tiene un aspecto aproximadamente así:


1
-1
1
-1

2. Sean a, b, c números reales y consideremos la función de costes de una empresa definida por

$$C(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + 3, & 0 \leq x < 100 \\ ax + b, & 100 \leq x < 200 \\ (x-200)^2 + c(x-200) + 18, & 200 \leq x \end{cases}$$

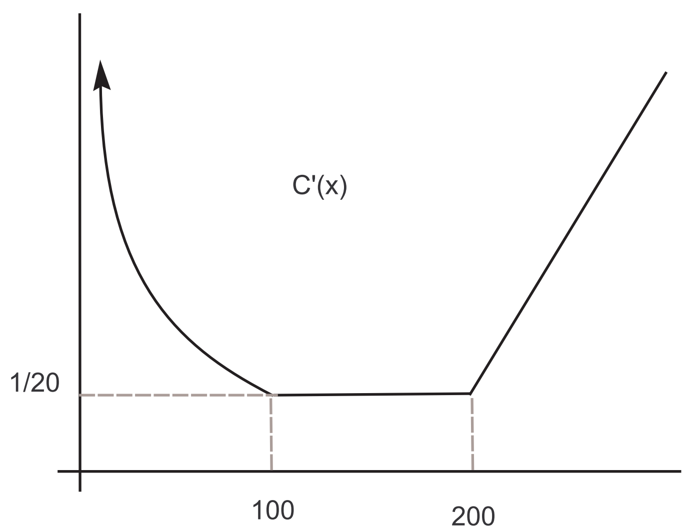
a) Estudiar, según los valores de a, b y c la derivabilidad de $C(x)$ en el intervalo $(0, \infty)$.

b) Supongamos que el precio de venta de su producto es $p = \frac{1}{4}$.
Analizar si la empresa aumentará o reducirá su producción en una pequeña cantidad, considerando que su producción inicial es $x_0 = 1$.
¿Y si su producción inicial es $x_0 = 9$?
Sugerencia: considerar la función de costes marginales de la empresa ($C_{mar}(x) = C'(x)$).
1 punto

---

a) En primer lugar, estudiamos si la función es continua en el punto $x = 100$. Para ello, observamos que
$\lim\limits_{x \longrightarrow 100^-} C(x) = 13$, $C(100) = \lim\limits_{x \longrightarrow 100^+} C(x) = 100a + b$, es decir, C continua en $x = 100$ cuando $13 = 100a + b$.
Y ahora, suponiendo que $C(x)$ es continua en $x = 100$, $C(x)$ es derivable en $x = 100$ cuando $\lim\limits_{x \longrightarrow 100^-} C'(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 100^+} C'(x)$, es decir, cuando $\frac{1}{20} = a$.
Por lo tanto, se deduce que $C(x)$ derivable en $x = 100$ cuando $a = \frac{1}{20}$, $b = 8$.
Y, en cuanto al punto $x = 200$, teniendo en cuenta que $a = \frac{1}{20}$, $b = 8$, observamos que
$\lim\limits_{x \longrightarrow 200^-} C(x) = 200a + b = 18$, $C(200) = \lim\limits_{x \longrightarrow 200^+} C(x) = 18$, es decir, C continua en $x = 200$ cuando $a = \frac{1}{20}$, $b = 8$.
Y ahora, como $C(x)$ es continua en $x = 200$, $C(x)$ es derivable en $x = 200$ cuando $\lim\limits_{x \longrightarrow 100^-} C'(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 100^+} C'(x)$, es decir, cuando $a = \frac{1}{20} = c$.
Por lo tanto, se deduce que $C(x)$ derivable en $(0, \infty)$ cuando $a = \frac{1}{20}$, $b = 8, c = \frac{1}{20}$.
.

b) La empresa aumentará su producción en x_0 cuando $C'(x_0) < p$, y reducirá su producción en x_0 cuando $C'(x_0) > p$.
Por lo tanto, como $C'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ si $0 < x < 100$, se deduce que:
$C'(1) = \frac{1}{2} > \frac{1}{4} = p \Longrightarrow$ la empresa reducirá su producción en una pequeña cantidad.
$C'(9) = \frac{1}{6} < \frac{1}{4} = p \Longrightarrow$ la empresa aumentará su producción en una pequeña cantidad.
El dibujo siguiente, que representa la curva de costes marginales cuando $a = \frac{1}{20}$, $b = 8, c = \frac{1}{20}$, puede aclarar la situación:



3. Sea $f(x) = \begin{cases} -x-1 & si\ x \leq 0 \\ x^2-2x & si\ \ x > 0 \end{cases}$ **y consideramos la función** $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, **donde** $a < b$**. Se pide:**

a) Enunciar el teorema de Weierstrass y determinar los valores a, b de forma que se satisfagan las hipótesis (o condiciones iniciales) de dicho teorema.

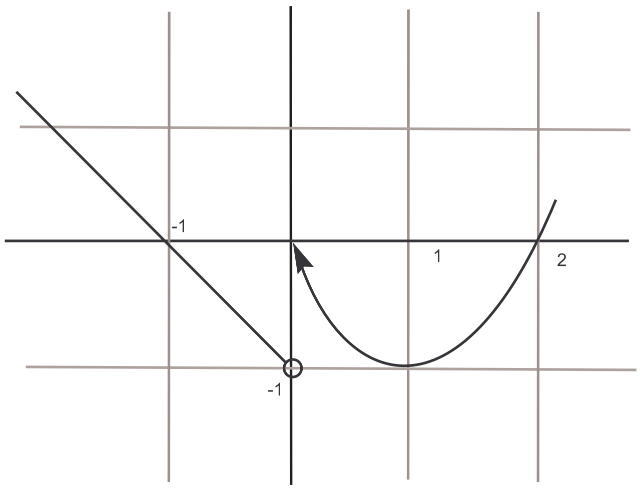
b) Determinar los valores a, b de forma que se satisfaga la tesis (o la conclusión) de dicho teorema.
Sugerencia: representar la gráfica de $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

1 punto

---

a) Las hipótesis se satisfacen cuando $b \leq 0$ o cuando $a > 0$.

b) La tesis se satisface, además de en los casos vistos en el apartado a), cuando $a \leq -1$ o cuando $b \geq 2$.
La gráfica de f tiene una forma, aproximadamente, así:



4. **Sea $C(x) = 100 + x + ax^2$ la función de costes de una empresa monopolista y sea $p(x) = 31 - bx$ la función inversa de demanda (o precio por unidad), donde $x \geq 0$ es el número de unidades producidas de cierta mercancía. Se cumple también que $0 < a, \mathbf{0 < b < 3'1}$. Se pide:**

   a) Hallar los valores a y b para que el nivel de producción $x = 10$ minimice el coste medio.

   b) Hallar los valores a y b para que el nivel de producción $x = 10$ maximice el beneficio.

   1 punto

---

a) Puesto que la función de costes medios $C_{med}(x) = \dfrac{C(x)}{x} = \dfrac{100}{x} + 1 + ax$ es una función convexa, pues $C"_{med}(x) = \dfrac{200}{x^3} > 0$ para $x > 0$, el valor mínimo se alcanzará en el único punto crítico.
Es decir, cuando $C'_{med}(x) = -\dfrac{100}{x^2} + a = 0$. Y, como deseamos que dicho punto crítico se alcance en $x = 10$, eso se cumplirá cuando $C'_{med}(10) = -\dfrac{100}{10^2} + a = 0$.
Es decir, cuando $a = 1, b$ cualquiera.

b) Puesto que la función de beneficios $B(x) = (31 - bx)x - (100 + x + ax^2)$ es una función cóncava, pues $B"(x) = -2(a + b) < 0$, el valor máximo se alcanzará en su punto crítico. Es decir, cuando $B\,'(x) = 30 - 2(a + b)x = 0$ y, como $x = 10$,
se ha de cumplir que $a + b = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}$.

5. **Dada $f(x) = 4x - x^2$ y $g(x)$ la recta tangente a la gráfica de f en el punto $x = 3$, se pide:**

a) Dibujar el recinto cerrado A limitado por las funciones f, g y el eje horizontal.

Asimismo, hallar los maximales y minimales, máximo y mínimo de A, si existen.

b) Calcular el área del recinto anterior.

1 punto

---

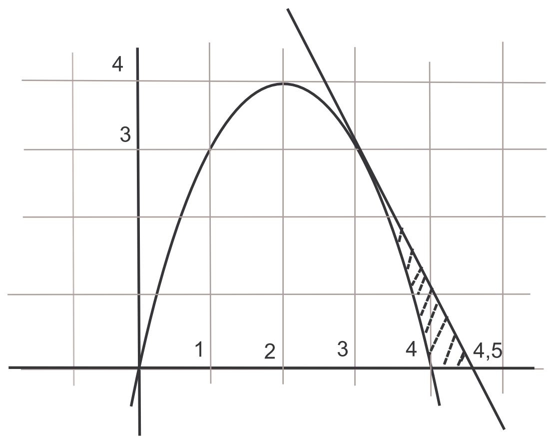
a) $f(x) = 4x - x^2$ describe una parábola cóncava cuyo vértice es el punto $(2, 4)$, pues $f\ '(2) = 0$, $f(2) = 4$.

Por lo tanto, la tangente a dicha gráfica en el punto $x = 3$ es una recta decreciente que queda siempre encima de la parábola.

Concretamente, como $f\ '(x) = 4 - 2x \Longrightarrow f\ '(3) = -2$, luego como $f(3) = 3$, la ecuación de la recta tangente será:

$y - 3 = (-2)(x - 3) \Longleftrightarrow y = -2x + 9$, que corta al eje horizontal en el punto $(4'5, 0)$.

Como, además, la parábola corta al eje horizontal en el punto $x = 4$, el recinto tiene una forma así:



Obviamente, $\max(A), \min(A)$ no existen, pues

maximales(A)= $\{(x, y) : y = -2x + 9, 3 \leq x \leq 4'5\}$

minimales(A)= $\{(x, y) : y = 4x - x^2, 3 \leq x \leq 4\}$.

b) El área solicitada puede entenderse como el área del triangulo de vértices $(3, 0), (4'5, 0)$ y $(3, 3)$, menos el área de la región comprendida entre la parábola $y = 4x - x^2$ y las rectas $y = 0, x = 3$.

Es decir, el área solicitada es:

$$\int_3^{4'5} (-2x + 9)dx - \int_3^4 (4x - x^2)dx = \left[-x^2 + 9x\right]_3^{4'5} - \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_3^4 =$$

$$= -20'25 + 40'5 + 9 - 27 - 32 + \frac{64}{3} + 18 - 9 = \frac{7}{12} \text{ unids área.}$$

6. **Dada la función** $f(x) = x(x^2 - a)^5$**, donde** $a > 1$. **Se pide:**

a) Hallar la integral indefinida $F(x) = \int f(x)dx$.

b) Determinar el valor de a de modo que la función $F(x)$ tenga un punto de inflexión en $x = 1$.

Observación: se puede hacer el apartado b) sin resolver el apartado a).

1 punto

---

a) $\int x(x^2 - a)^5 dx = \frac{1}{2}\int 2x(x^2 - a)^5 dx = \frac{1}{12}(x^2 - a)^6 + C$.

b) Como $F'(x) = f(x), F"(x) = f\ '(x) = (x^2 - a)^5 + 5x(x^2 - a)^4 2x$, se deduce que,

si $x = 1$ ha de ser un punto de inflexión de F, se ha de cumplir que

$F"(x) = (x^2 - a)^4[x^2 - a + 10x^2] = (x^2 - a)^4[11x^2 - a]$ ha de anularse en $x = 1$. Luego

$F"(1) = (1 - a)^4[11 - a]$, luego para que F tenga un punto de inflexión en $x = 1$ ha de cumplirse que $a = 11$.

Y ahora, si $a = 11$, como $(x^2 - 11)^4$ siempre es positivo cerca de $x = 1$, tenemos que:

$F"(x) < 0$ si $-1 < x < 1$, $F"(x) > 0$ si $x > 1$, entonces $x = 1$ es un punto de inflexión de F.