HOJA 1: Introducción

1. Para cada una de las desigualdades que siguen, determinar el conjunto de números reales que las satisfacen. Dibujar dicho conjunto.

a)(*) $|9-2x|< 1$ b)(*)$-5|x+3|< 4x-5$ c)(*)$\frac{|x|}{3}+2<|x|$ d)(*) $1<|3-2x|$

e)(*) $\frac{(x^2-16)(x-1)}{x-3}\geq 0$ f) $|x-3|+|x+3|< 10$ g) $|x-3|+|x+3|<\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$ h)$|\frac{x-1}{x}|-1\geq 0$

a) $Sol:\ (4,5)$
b)$Sol:\ (-\infty,-20)\cup(-10/9,\infty)$.
c) $Sol:\ (-\infty,-3)\bigcup(3,\infty)$.
d) $Sol:\ (-\infty,1)\cup(2,\infty)$.
e)$Sol:\ (-\infty,-4]\cup[1,3)\cup[4,\infty)$.
f) $Sol.:\ (-5,5)$.
g) Si $\alpha\leq 6,$ la solución es el conjunto vacío; si $\alpha>6,$ la solución es $(-\alpha/2,\alpha/2)$.
h) Sol.: $(-\infty,0)\cup(0,\frac{1}{2}]$.

2. (*)Interpreta geométricamente las desigualdades a), b), c) y d) mediante las funciones

a) $y=|9-2x|$; $y=1$ b) $y=-5|x+3|$; $y=4x-5$

c) $y=\frac{|x|}{3}+2$; $y=|x|$ d) $y=1$; $y=|3-2x|$

3. Discutir si se cumplen las desigualdades siguientes :

a) (*)$|x+y|\leq|x|+|y|$ b)(*)$|x|+|y|\leq|x+y|$ g)(*) $|x-y|\leq|x|+|y|$

c)(*) $|x-y|\leq|x|-|y|$ d)(*) $|x|-|y|\leq|x-y|$ h)(*) $|x|+|y|\leq|x-y|$

e)(*) $||x|-|y||\leq|x|+|y|$ f) $|x|+|y|\leq||x|-|y||$ i) $||x|-|y||\leq|x|-|y|$

a) Siempre es cierta.
b) Solo se cumple si $x,y\in[0,\infty)$ o si $x,y\in(-\infty,0]$.
c) Solo se cumple si $0\leq y\leq x$ ó $x\leq y\leq 0$.
d) Se cumple siempre.
e) Se cumple siempre.
f) Solo se cumple si $x=0$ ó $y=0$.
g) Se cumple siempre.
h) Solo se cumple cuando x e y tienen distinto signo.
i) Solo se cumple si $|y|\leq|x|$.

4. Discutir la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones

a) $x<y\Rightarrow x^2<y^2$ b) $|x|<|y|\Rightarrow x^2<y^2$

c) $x^2<y^2\Rightarrow x<y$ d) $x^2<y^2\Rightarrow|x|<|y|$

a) Si $y\leq 0,$ siempre es falsa; si $0\leq x,$ siempre es cierta; en el resto de los casos, depende.
b) y d) siempre son ciertas.
c) Si $y<0,$ siempre es falsa; si $0<y,$ siempre es cierta; si $y=0,$ es imposible.

5. Obtener para los conjuntos $A\subset\mathbb{R}$ que se definen a continuación, el máximo y el mínimo, si los hubiera, para $\alpha=-1,\ \alpha=0$ y $\alpha=1$

a) $A=\{x:\ sen x=\alpha\}$ b) $A=\{x:\ \cos x=\alpha\}$ c) $A=\{x:\ e^x\leq\alpha\}$

d) $A=\{x:\ e^x\geq\alpha\}$ e) $A=\{x:\ \ln x\leq\alpha\}$ f) $A=\{x:\ \ln x\geq\alpha\}$

a) A no tiene ni máximo ni mínimo.

b) A no tiene ni máximo ni mínimo.

c) si $\alpha = -1$ o si $\alpha = 0 \Rightarrow A$ no tiene ni máximo ni mínimo; si $\alpha = 1 \Rightarrow A$ no tiene mínimo, pero max(A)=0.

d) si $\alpha = -1$ o si $\alpha = 0 \Rightarrow A$ no tiene ni máximo ni mínimo;si $\alpha = 1 \Rightarrow A$ no tiene máximo, pero min(A)=0.

e) si $\alpha = -1, \alpha = 0$ o si $\alpha = 1 \Rightarrow A$ no tiene mínimo, pero max(A)=$e^{-1}, 1, e,$ respectivamente.

f) si $\alpha = -1, \alpha = 0$ o si $\alpha = 1 \Rightarrow A$ no tiene máximo, pero min(A)=$e^{-1}, 1, e,$ respectivamente.

6. (*)En $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se define la siguiente relación: $(a,b) \leq (c,d)$ si y sólo si $a \leq c$ y $b \leq d$. Comprobar que "$\leq$" es una relación de orden parcial. Sean $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y \leq 1\}$, $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \, |x| \leq 1;\ |y| \leq 1\}$, $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \, 0 \leq y \leq 4 - x^2\}$
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \, x^2 - 9 \leq y \leq 0\}$ y $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq y \leq 6 - x^2\}$.

Obtener para los conjuntos anteriores, si los hubiera, el máximo y el mínimo, los maximales y los minimales.

a) maximales (A)=$\{(x,y) : x+y = 1\}$.

b) maximales (B)=Máximo (B)=$\{(1,1)\}$; minimales (B)=Mínimo (B)=$\{(-1,-1)\}$.

c) maximales (C)={(x,y): $y = 4 - x^2, 0 \leq x \leq 2\}$; $\min imales(C) = Mínimo(C) = \{(-2,0)\}$.

d) maximales (D)=Máximo (D)=$\{(3,0)\}$; minimales (D)={(x,y): $y = x^2 - 9, -3 \leq x \leq 0\}$.

7. (*)Sean $f(x) = 1/x$ y $g(x) = x^2 - 1$.

a) Hallar el dominio y la imagen de estas funciones.

b) Hallar $f(g(2))$ y $g(f(2))$.

c) Hallar $f(g(x))$ y $g(f(x))$.

a) Dom (f)=$(-\infty,0) \cup (0,\infty) = \mathrm{Im}(f). Dom(g) = \mathbb{R}, \mathrm{Im}(g) = [-1,\infty)$.

c) $f(g(x)) = \frac{1}{x^2-1}$ y $g(f(x)) = \frac{1}{x^2} - 1$.

8. (*)Hallar el dominio y la imagen de las siguientes funciones:

a)$f(x) = ln(senx)$ b)$g(x) = ln(sen^2 x)$

c) $h(x) = ln\sqrt{-x^2 + 4x - 3}$

a) Dom $(f) = \{x : senx > 0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k\pi, (2k+1)\pi); \mathrm{Im}(f) = (-\infty, 0]$

b) Dom $(f) = \{x : senx \neq 0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k\pi, (k+1)\pi); \mathrm{Im}(f) = (-\infty, 0]$

c) $Dom(f) = \{x : -x^2 + 4x - 3 > 0\} = \{x : x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x-1) < 0\} = (1,3)$; $\mathrm{Im}(f) = (-\infty, 0]$.

9. Repasar las gráficas de las funciones:

a)(*) $f(x) = x^2$ b)(*)$f(x) = e^x$ c)(*)$f(x) = lnx$ d) $f(x) = senx$

En cada caso dibujar las gráficas de las funciones siguientes a partir de las anteriores, interpretando geométricamente los resultados.

i)$g(x) = f(x+1)$ ii)$h(x) = -2f(x)$ iii)$p(x) = f(3x)$

iv)$s(x) = f(x) + 1$ v)$r(x) = |f(x)|$ vi)$m(x) = f(|x|)$

i) Trasladar la gráfica una unidad a la izquierda.

ii) Estirar la gráfica verticalmente ($2f(x)$) y, luego, hacer una reflexión respecto al eje horizontal ($-2f(x)$).

iii) Comprimir verticalmente la gráfica.

iv) Trasladar verticalmente la gráfica una unidad hacia arriba.

v) Mantener invariante la parte de la gráfica que queda encima del eje horizontal, y obtener la parte simétrica respecto al

eje horizontal de la parte de gráfica que queda debajo de este eje.

vi) Mantener invariante la parte de la gráfica que queda a la derecha del eje vertical, suprimir la parte izquierda de la gráfica y

sustituirla por la simétrica de la parte que queda a la derecha del eje vertical.

10. (*)Sean $f,\ g : I \to \mathbb{R}$ funciones crecientes. Discutir la verdad o falsedad de las siguiente afirmaciones

a) $f + g : I \to \mathbb{R}$ es una función creciente
b) $f \cdot g : I \to \mathbb{R}$ es una función creciente
c) $f - g : I \to \mathbb{R}$ es una función creciente si ambas funciones son positivas
d) $f - g : I \to \mathbb{R}$ es una función creciente si ambas funciones son negativas
a) Obvio.
b) Si f, g positivas: obvio.
c) Falso.
d) Falso.

11. Sean $f,\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones monótonas. Discutir cuando será $g \circ f$ creciente o decreciente dependiendo del comportamiento de f y g (en total cuatro casos).

a) *gof* será creciente si ambas son crecientes o decrecientes.

b) *gof* será decreciente si una de ellas es decreciente y la otra es creciente.

12. Para cada una de las siguientes funciones, por ejemplo f, hallar los intervalos I, J para que $f : I \to J$ sea biyectiva.

a) $f(x) = x^2$; *b)* $g(x) = \ln|x|$; *c)* $h(x) = sen(x)$; *d)* $i(x) = e^{-x^2}$.

c) $h : [-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi] \longrightarrow [-1, 1]$ *d)* $i : (-\infty, 0] \to (0, 1],\ i : [0, \infty) \to (0, 1]$.

13 (*)Calcula la función inversa de las siguientes funciones:

$f(x) = (x^3 - 5)^5,\quad g(x) = (\sqrt[3]{x-5}\,)^5\quad h(x) = \ln(\frac{x-1}{x-2}); i(x) = \frac{3x-1}{x-3};$

$$j(x) = \begin{cases} x+3 & -3 \le x \le 0 \\ -2x & 0 < x \le 3 \end{cases}$$

a) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{5 + \sqrt[5]{x}}$.

b) $g^{-1}(x) = 5 + x^{3/5} = 5 + (\sqrt[5]{x}\,)^3$.

c) $h^{-1}(x) = \frac{2e^x-1}{e^x-1}$ d) $i^{-1}(x) = i(x)$ e) $j^{-1}(x) = \begin{cases} x-3 & 0 \le x \le 3 \\ -x/2 & -6 \le x < 0 \end{cases}$

14. Determinar si las siguientes funciones son pares, impares o ninguno de los dos casos:

a) $f(x) = cos5x$ b)$g(x) = sen2x$ c)$h(x) = cos5xsen2x$ d)$k(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

e)$l(x) = \frac{x^3}{x^4+1}$ f)$m(x) = \frac{x^3}{x^5+1}$ g) $n(x) = \frac{arctgx}{x}$

a) Par.

b) Impar.

c) Impar.

d) Par.

e) Impar.

f) Ni par ni impar.

g) Par.

15. Sea f una función par y g una función impar. Demuestra que:

$|g|$ es par; $f \circ g$ es par; $g \circ f$ es par;

$f \cdot g$ es impar; g^k es par (si k es par); g^k es impar (si k es impar)

16. Determinar cuáles de las siguientes funciones son periódicas, y calcular su periodo.

$f(x) = sen 4x \quad g(x) = tg(\frac{x}{3}) \quad l(x) = sen(3x + 2)$

a) $f(x)$ tiene período $2\pi/4$.

b) $g(x)$ tiene período 3π.

c) $l(x)$ tiene perído $2\pi/3$.

17. Sea f una función cualquiera y g una función periódica.¿Es posible afirmar que $f \circ g$ y $g \circ f$ sean periódicas?

Justifica que $f(x) = \frac{tg^2 3x + ln(tg 3x)}{1 + tg 3x}$ es periódica.

fog es una función periódica.

Por otra parte, *gof* no tiene por qué ser periódica.