

HOJA 5: Integración

1. (*) Calcula las siguientes integrales:

$$\begin{array}{lll}
 a) \int \frac{x^2 + x + 1}{x\sqrt{x}} dx & b) \int x e^{-2x} dx & c) \int \operatorname{sen}^{14} x \cos x dx \\
 d) \int (x+1)(2-x)^{1/3} dx & e) \int \frac{x^4}{1+x^5} dx & f) \int (1 + \frac{1}{x})^3 \frac{1}{x^2} dx \\
 g) \int \operatorname{sen}^3 x dx & h) \int x e^{ax^2} dx & i) \int \frac{1}{3+x^2} dx \\
 j) \int \frac{\sqrt{x-1}}{1+\sqrt[3]{x-1}} dx & k) \int \frac{x}{\sqrt{16-x^2}} dx & l) \int x^4 \ln x dx \\
 m) \int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3} - \sqrt{x}} & n) \int (\ln x)^2 dx & \tilde{n}) \int \frac{40x}{(x-1)^{40}} dx \\
 o) \int \frac{4x+6}{(x^2+3x+7)^3} dx & p) \int \frac{2x-6}{(x-2)^2} dx & q) \int \frac{x^2+1}{x^3-4x^2+4x} dx \\
 r) \int \frac{2x+1}{x^3+6x} dx & s) \int \frac{1}{\frac{x^2}{2}-2x+4} dx & t) \int \frac{x^4}{x^4-1} dx
 \end{array}$$

2. ¿Cuántos puntos de corte pueden tener dos primitivas diferentes de una misma función?

3. (*) Sea $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ continua, creciente en $(0, 1)$, decreciente en $(1, 2)$ y, además, cumple que: $f(0) = 3$, $f(1) = 5$ y $f(2) = 4$. ¿Entre qué valores se puede asegurar que está $\int_0^2 f(x) dx$?

4. (*) Una cierta compañía ha determinado que su coste marginal es $\frac{dC}{dx} = 4(1 + 12x)^{-1/3}$. Hallar la función de coste si $C = 100$ cuando $x = 13$.

5. (*) Sabiendo que el coste marginal de producir x unidades es $x + 5$ y que el coste medio tiene un mínimo en $x = 4$, halla los costes fijos de la empresa.

6. (*) Calcula $F'(x)$ en los casos que siguen:

$$a) \int_x^{x^3} t \cos t dt \quad b) \int_1^{x^2} \sqrt{t^4 + 2t} dt \quad c) \int_1^{x^2} (t^2 - 2t + 5) dt$$

7. Calcula $F'(x)$ en los casos que siguen:

(a) $\int_{-x}^{x^2} t g^2 t dt$, suponiendo que $x^2 < \frac{\pi}{2}$.

(b) $\int_{x^2}^{2x} f^2(2t) dt$, suponiendo que f es continua.

8. (*) ¿Para qué valores de x tiene $F(x) = \int_{-3}^x \frac{t^2-4}{3t^2+1} dt$ un máximo o un mínimo local?

9. Sea $F(x) = \int_{x^2}^{2x} f(t^2) dt$ tal que $f(1) = 1$, $f(2) = f(4) = 4$ y f es continua. Calcula $F'(1)$.

10. (*) Calcula observando la simetría de las funciones:

$$a) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{27} x \cos^{28} x dx \quad b) \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (\sqrt[3]{x^5 \cos 3x} + \cos \frac{x}{3} + \tan^3 x) dx$$

11. Sea f una función de periodo T , tal que $\int_0^T f = b$. Halla $\int_a^{a+nT} f$.

12. (*) Halla el área comprendida entre las curvas siguientes:

a) $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $g(x) = -x^2 + 2x + 3$

b) $f(x) = (x - 1)^3$, $g(x) = x - 1$

c) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$, $g(x) = 1 - x^2$

13. (*) Dibuja las gráficas de las funciones $y = 2e^{2x}$ e $y = 2e^{-2x}$. Calcula el área entre dichas gráficas y las rectas $x = -1$ y $x = 1$.

14. Sea $f : [1, 3] \rightarrow [2, 4]$ creciente, continua y biyectiva, tal que $\int_1^3 f dx = 5$. Calcula $\int_2^4 f^{-1}(x) dx$

15. (a) Dada $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, convexa y creciente, con valores $f(0) = 0$, $f(2) = \alpha$, $f'(2) = \beta$, $f(4) = 16$. Estimar, en función de α y β , el valor de $\int_0^4 f(x) dx$.

(b) Dada $f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, cóncava y creciente, con valores $f(0) = 0$, $f(2) = \alpha$, $f'(2) = \beta$, $f(4) = 2$. Estimar, en función de α y β , el valor de $\int_0^4 f(x) dx$.

16. Las ventas de un producto vienen dadas por la fórmula $S(t) = 10 + 5\text{sen}(\frac{\pi t}{6})$ donde S se mide en miles de unidades y el tiempo t en meses. Calcula las ventas promedio durante el año ($0 \leq t \leq 12$).

17. Calcula:

a) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ b) $\int_0^3 \frac{1}{x^3} dx$ c) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$
d) $\int_1^\infty e^{-x} dx$ e) $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ f) $\int_{-2}^4 \frac{dx}{x^2}$

18. Calcula $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$