Tema 5

Integración

5.1 La integral indefinida

En muchos aspectos, la operación llamada integración que vamos a estudiar aquí es la operación inversa a la derivación.

Definición 5.1.1. La función F es una antiderivada (o primitiva) de la función f en el intervalo I si $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.

Por lo que ambas $F_1(x) = x^3 + 6$ y $F_2(x) = x^3 - 2$ son antiderivadas de $f(x) = 3x^2$ en cualquier intervalo.

Teorema 5.1.2. *Si F_1 y F_2 son dos antiderivadas arbitrarias de f en I, entonces $F_1(x) - F_2(x) = const.$ en I.*

Proof. Por definición de antiderivada $F_1' = F_2' = f$ en I, por lo que $(F_1 - F_2)'(x) = 0$ para todo $x \in I$. Puesto que una función con derivada nula en un intervalo es una función constante, tenemos que $F_1(x) - F_2(x) = \text{const.}$ □

Corolario 5.1.3. *Si F es una de las antiderivadas de f en I, y G es otra antiderivada de la función f en I entonces G tiene la forma $G(x) = F(x) + C$, donde C es una constante.*

Definición 5.1.4. El conjunto de todas las antiderivadas de la función f en el intervalo I es llamado la integral indefinida de f en I, y es denotado por

$$\int f(x)\,dx.$$

Observemos que por el Corolario 5.1.3, $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, donde F es una de las antiderivadas de f en I, y C es una constante arbitraria. A menudo el símbolo $\int f(x)\,dx$ denota no el conjunto de todas las antiderivadas sino cualquiera de ellas.

5.1.1 Propiedades de la Integral Indefinida

1. $\int F'(x)\,dx = F(x) + C$;

2. Sean f, g funciones cualesquiera y a, b constantes, $\int (af(x) + bg(x))\,dx = a\int f(x)\,dx + b\int g(x)\,dx$.

5.1.2 Reglas básicas de Integración

1. $\displaystyle\int 0\,dx = C;$

2. $\displaystyle\int 1\,dx = x + C;$

3. $\displaystyle\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C \qquad (a \neq -1);$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \qquad (x \neq 0);$

5. $\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad (0 < a \neq 1),\ \int e^x\,dx = e^x + C;$

6. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C;$

7. $\displaystyle\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C;$

8. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C \qquad (x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \text{ entero});$

9. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \qquad (-1 < x < 1);$

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C.$

5.1.3 Integración con Cambio de Variable

A veces la tarea de encontrar la integral $\int f(x)\,dx$ se simplifica a través de un cambio de variable $x = \varphi(t)$. La *fórmula de cambio de variable* en una integral indefinida es

$$\int f(x)\,dx\Big|_{x=\varphi(t)} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Ejemplo 5.1.5. Hallar $\int \tan x\,dx$.

Solución: Sea $t = \cos x$. Entonces $dt = -\operatorname{sen} x\,dx$. Así, por la fórmula de cambio de variable

$$\int \tan x\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

Ejemplo 5.1.6. Hallar $\int \sqrt{2x-1}\,dx$.

Solución: Sea $t = 2x - 1$. Entonces $dt = 2dx$. Por lo que,

$$\int \sqrt{2x-1}\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{t}\,dt = \frac{1}{2}\int t^{1/2}\,dt = \frac{1}{2}\frac{t^{3/2}}{3/2} + C = \frac{1}{3}t^{3/2} + C = \frac{1}{3}(2x-1)^{3/2} + C.$$

Ejemplo 5.1.7. Hallar $\int x\sqrt{2x-1}\,dx$.

Solución: Sea $t = 2x - 1$. Entonces $dt = 2dx$. Además, $x = (1+t)/2$. Aplicando la fórmula de cambio de variable, tenemos

$$\int x\sqrt{2x-1}\,dx = \frac{1}{4}\int (1+t)t^{1/2}\,dt = \frac{1}{4}\int t^{1/2} + t^{3/2}\,dt = \frac{1}{4}\left(\frac{t^{3/2}}{3/2} + \frac{t^{5/2}}{5/2}\right) + C$$
$$= \frac{1}{4}[\frac{2}{3}t^{3/2} + \frac{2}{5}t^{5/2}] + C = \frac{1}{6}t^{3/2} + \frac{1}{10}t^{5/2} + C = \frac{1}{6}(2x-1)^{3/2} + \frac{1}{10}(2x-1)^{5/2} + C$$

Ejemplo 5.1.8. Hallar $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$.

Solución: Sea $t = \ln x$. Entonces $dt = dx/x$ y

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int t\,dt = \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C.$$

Ejemplo 5.1.9. Hallar $\int xe^{-x^2}\,dx$.

Solución: Sea $t = x^2$. Entonces $dt = 2xdx$ y

$$\int xe^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int e^{-t}\,dt = -\frac{1}{2}e^{-t} + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C.$$

5.1.4 Integración por partes

Para funciones derivables u y v tenemos que $(uv)' = uv' + vu'$. Tomando integrales y dado que $\int (uv)'(x)\,dx = u(x)v(x)$, tenemos

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx.$$

Esta relación es conocida como la *fórmula de integración por partes*. Usando las identificaciones $u'(x)\,dx = du$ y $v'(x)\,dx = dv$ podemos escribir esta fórmula como

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Ejemplo 5.1.10. Hallar $\displaystyle\int xe^x\,dx$.

SOLUCIÓN: Sea $u = x$ y $dv = e^x\,dx$. Entonces $du = dx$ y $v = e^x$. Por lo que

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = e^x(x-1) + C.$$

Ejemplo 5.1.11. Hallar $\displaystyle\int x^2 \ln x\,dx$.

SOLUCIÓN: Sea $u = \ln x$ y $dv = x^2\,dx$. Observemos que $du = dx/x$ y $v = x^3/3$. Entonces, usando la fórmula de integración por partes, tenemos

$$\int x^2 \ln x\,dx = \ln x\left(\frac{x^3}{3}\right) - \int \frac{x^3}{3x}\,dx = \ln x\left(\frac{x^3}{3}\right) - \frac{1}{3}\int x^2\,dx = \ln x\left(\frac{x^3}{3}\right) - \frac{1}{9}x^3 + C. ====$$

Ejemplo 5.1.12. Hallar $\displaystyle\int \arctan x\,dx$.

SOLUCIÓN: Sea $u = \arctan x$ y $dv = dx$. Entonces $du = dx/(1+x^2)$ y $v = x$. Por lo que

$$\int \arctan x\,dx = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx.$$

Ahora, observemos que usando el cambio de variable $t = x^2$ tenemos $dt = 2x\,dx$, de este modo

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t}\,dt = \frac{1}{2}\ln|1+t| + C = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Conectando este valor a la expresión anterior, obtenemos finalmente que

$$\int \arctan x\,dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Ejemplo 5.1.13. Hallar $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx$.

SOLUCIÓN: Sea $u = x^2$ y $dv = \operatorname{sen} x\,dx$. Entonces $du = 2x\,dx$ y $v = -\cos x$. Así

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx.$$

Aplicando de nuevo la integración por partes a la segunda integral, $u = x$ y $dv = \cos x\,dx$ tenemos que $du = dx$ y $v = \operatorname{sen} x$, por lo que

$$\int x\cos x\,dx = x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,dx = x\operatorname{sen} x + \cos x + C.$$

Conectando este valor a la expresión anterior, obtenemos finalmente que

$$\int x^2 \operatorname{sen} x\,dx = -x^2\cos x + 2x\operatorname{sen} x + 2\cos x + C.$$

5.1.5 Integración de Funciones Racionales

Una función racional es de la forma $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, donde P_n y Q_m son polinomios de grado n y m, respectivamente. Si $n \geq m$ la fracción es *impropia* y puede ser representada por

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = P_{n-m}(x) + \frac{R_k(x)}{Q_m(x)},$$

donde el grado del polinomio R_k es $k < m$. Por lo que la integración de una fracción impropia puede ser reducida a la integración de una fracción propia

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\,dx = \int P_{n-m}(x)\,dx + \int \frac{R_k(x)}{Q_m(x)}\,dx.$$

Ejemplo 5.1.14.

$$\int \frac{x^3 + x^2 + x}{x^2 + 1}\,dx = \int (x+1)\,dx - \int \frac{1}{x^2+1}\,dx,$$

Puesto que la división de los polinomios es

$$\frac{x^3 + x^2 + x}{x^2 + 1} = x + 1 - \frac{1}{x^2+1}.$$

Así

$$\int \frac{x^3 + x^2 + x}{x^2 + 1}\,dx = \frac{1}{2}(x+1)^2 - \arctan x + C.$$

Teorema 5.1.15. *Supongamos que* $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ *es una fracción propia* ($n < m$) *y que*

$$Q_m(x) = (x-a)^{\alpha} \cdots (x-b)^{\beta}$$

donde $a \ldots b$ *son las raíces reales de multiplicidad* $\alpha \ldots \beta$. *Entonces existen constantes* $A_i \ldots B_i$ *tales que*

$$\begin{aligned}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} &= \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_{\alpha-1}}{(x-a)^{\alpha-1}} + \cdots + \frac{A_1}{x-a} \\ &\quad + \cdots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \frac{B_{\beta-1}}{(x-b)^{\beta-1}} + \cdots + \frac{B_1}{x-b}\end{aligned}$$

Ejemplo 5.1.16. Una consecuencia importante es que para una fracción propia que satisface la condición $\alpha = \cdots = \beta = 1$, tenemos

$$\begin{aligned}\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}\,dx &= \int \frac{A}{x-a}\,dx + \cdots + \int \frac{B}{x-b}\,dx \\ &= A \ln|x-a| + \cdots + B \ln|x-b| + C.\end{aligned}$$

Ejemplo 5.1.17. Hallar $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx$.

Solución: Notemos que $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$. Entonces

$$\frac{1}{(x-3)(x-2)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}=\frac{A(x-2)+B(x-3)}{(x-3)(x-2)}.$$

donde $1=A(x-2)+B(x-3)$ es llamada ecuación básica. Para hallar los valores de A y B hacemos $x=2$ en la ecuación básica y obtenemos que $1=-B$, por tanto, $B=-1$ y haciendo $x=3$ obtenemos $A=1$. De aquí que

$$\int \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx=\ln|x-3|-\ln|x-2|+C.$$

Ejemplo 5.1.18.
$\int \frac{A}{(x-a)^\alpha}\,dx=\frac{A}{1-\alpha}\frac{1}{(x-a)^{\alpha-1}}+C, \quad (\alpha>1)$

Ejemplo 5.1.19. Si x^2+px+q no tiene raíces reales

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx=\int \frac{M}{2}\frac{2x+p}{x^2+px+q}+(N-\frac{Mp}{2})\int\frac{dx}{x^2+px+q}$$

Calculando ambas integrales por separados, obtenemos para la primera

$$\int \frac{M}{2}\frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)$$

y para la segunda

$$(N-\frac{Mp}{2})\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\frac{2N-Mp}{2\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\int\frac{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}{x^2+px+q}dx=$$

$$\frac{2N-Mp}{2\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\int\frac{\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}}{\left(\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\right)^2+1}dx=\frac{2N-Mp}{2\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\arctan\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}$$

Finalmente

$$\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx=\frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{2N-Mp}{2\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\arctan\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C$$

5.2 La Integral Definida

Definición 5.2.1. La integral definida de una función continua no-negativa f en el intervalo $I=[a,b]$ es el área, A, de la región limitada por la gráfica de f, el eje x, y las rectas verticales $x=a$ y $x=b$. La integral definida viene dada por

$$\int_a^b f(x)\,dx=A.$$

Ejemplo 5.2.2. Si $f(x) = 1 - x$, entonces $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 1/2$, puesto que la región bajo la gráfica de f, limitada por $x = 0$, $x = 1$ es el triángulo rectángulo con área $1/2$.

Definición 5.2.3. La integral definida de una función continua no-positiva f en el intervalo $I = [a, b]$ es el área con signo negativo de la región limitada por la gráfica de f, el eje x, y las rectas verticales $x = a$, $x = b$. Por lo que,

$$\int_a^b f(x)\,dx = -A.$$

Es sencillo definir la integral definida de una función que cambia de signo en el intervalo $[a, b]$. A modo de ejemplo, supongamos que f es continua en $[a, b]$ y satisface $f \geq 0$ en $[a, c]$, $f \leq 0$ en $[c, b]$. Entonces la integral definida de f en $[a, b]$ es la diferencia de las áreas

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_{[a,c]} - A_{[c,b]} = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

(ver Propiedad (4) abajo).

Situaciones más complejas pueden ser tratadas de manera similar.

Ejemplo 5.2.4 (Ejemplo 5.2.2, continuación)**.** Si $f(x) = 1 - x$, entonces $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx = 0$, ya que sabemos que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 1/2$ y $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx = -1/2$. Esto último es debido a que la región limitada por f entre $x = 1$ y $x = 2$ es de nuevo un triángulo rectángulo de área $1/2$.

5.2.1 Propiedades de la integral definida

En lo que sigue f y g son funciones continuas en $[a, b]$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$;
2. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$;
3. $\displaystyle\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx$.
4. Para cualquier $c \in [a, b]$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.
5. Si $f(x) \geq g(x)$ en $[a, b]$, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$.
6. Si $f(x)$ es una función creciente en $[a, b]$, entonces $f(a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq f(b)$.
7. Si $f(x)$ es una función decreciente en $[a, b]$, entonces $f(b) \leq \int_a^b f(x)dx \leq f(a)$.

8. Si $f(x)$ es una función convexa en $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx \leq [f(a) + f(b)](b - a)/2$.

9. Si $f(x)$ es una función cóncava en $[a, b]$, entonces $[f(a) + f(b)](b - a)/2 \leq \int_a^b f(x)dx$.

5.3 Regla de Barrow

En esta sección mostramos la conexión entre áreas y antiderivadas.

Definición 5.3.1. Sea la función f continua en el intervalo $[a, b]$. La función

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad (a \leq x \leq b)$$

se dice que es una integral con límite superior variable.

Teorema 5.3.2 (Teorema Fundamental del Cálculo Integral)**.** *Si la función f es continua en el intervalo $[a, b]$, entonces la función $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ es una antiderivada de f en $[a, b]$.*

Dicho de otra manera, el teorema establece que

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x).$$

Teorema 5.3.3 (Regla de Barrow)**.** *Si la función f es continua en el intervalo $[a, b]$, entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a),$$

donde G es una antiderivada de f en $[a, b]$.

Proof. Sea G una antiderivada arbitraria de f en $[a, b]$. Entonces, por el Teorema 5.1.2, $G - F$ es constante en $[a, b]$, dado que $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, es también una antiderivada de f. En consecuencia, $G(a) - F(a) = G(b) - F(b)$, o

$$G(b) - G(a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^a f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

□

La mayoría de las veces vamos a escribir $G(b) - G(a)$ como $G(x)|_a^b$.

Teorema 5.3.4 (Cambio de variable)**.** *Sea f continua en $[a, b]$, y sea $x = g(t)$ differenciable y creciente en $[\alpha, \beta]$, donde $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$ and $a \leq g(t) \leq b$. Entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt.$$

Teorema 5.3.5 (Integracion por partes)**.** *Si f y g tienen derivadas continuas en $[a, b]$, entonces*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

5.3.1 El área de una región plana

Dada una función continua f, el área de la región limitada por la curva $y = f(x)$, el eje OX y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ es

$$A = \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Ejemplo 5.3.6 (Ejemplo 5.2.4, continuación)**.** El área de la región limitada por $y = 1 - x$ en el intervalo $[0, 2]$ es

$$A = \int_0^2 |1 - x|\, dx = \int_0^1 (1 - x)\, dx + \int_1^2 (x - 1)\, dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

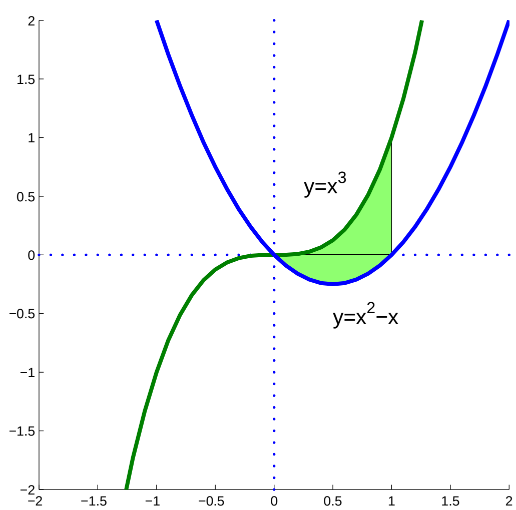
Supongamos que una región plana está limitada por las curvas continuas $y = f(x)$, $y = g(x)$, $a \le x \le b$, donde $g(x) \le f(x)$, y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ (las rectas pueden degenerar en un punto). Entonces el área de la región es

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx.$$

Ejemplo 5.3.7. Hallar el área de la región limitada por las curvas $y = x^3$, $y = x^2 - x$ en el intervalo $[0, 1]$.

Solución: Las curvas se cortan en un punto. Resolviendo la ecuación $x^3 = x^2 - x$, encontramos la abscisa del punto, $x = 0$. Por lo tanto una de las curvas se mantiene por encima de la otra en todo el intervalo. Para saber cuál de las curvas está por encima, simplemente sustituímos en $x^3 - x^2 + x$ un valor arbitrario del intervalo; para $x = 1/2$ tenemos que $x^3 - x^2 + x|_{x=1/2} = 0.375 > 0$, así x^3 está por encima de $x^2 - x$ en $[0, 1]$. El área es

$$A = \int_0^1 (x^3 - (x^2 - x))\, dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) - 0 = \frac{5}{12}.$$



Ejemplo 5.3.8. Hallar el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = 2 - x^2$, $g(x) = x$.

Solución: Las gráficas de las funciones se cortan en dos puntos. Resolviendo la ecuación $2 - x^2 = x$ encontramos que los puntos de corte son $x = -2$, $x = 1$. Por tanto, una de las curvas se mantiene por encima de la otra en el intervalo $[-2, 1]$. De nuevo, para saber cuál de las gráficas está por encima, simplemente sustituímos en $2 - x^2 - x$ un valor arbitrario del intervalo $[-2, 1]$; para $x = 0$ tenemos que $(2 - x^2 - x)|_{x=0} = 2 > 0$, de modo que $2 - x^2$ está por encima de $y = x$ en $[-2, 1]$. El área es

$$A = \int_{-2}^{1} (2 - x^2 - x)\, dx = \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{1} = \left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) - \left(-4 + \frac{8}{3} - 2\right) = \frac{9}{2}.$$