Capítulo 2: Ecuaciones en diferencias (I)

1. Introducción

En este capítulo consideraremos sistemas de ecuaciones en los que cada variable está indexada en el tiempo $t = 0, 1, 2, \ldots$, y variables correspondientes a tiempos distintos están relacionadas de una manera no trivial. Tales sistemas se denominan *sistemas de ecuaciones en diferencias* y son muy útiles para describir *sistemas dinámicos en tiempo discreto*

El estudio de modelos dinámicos en economía es importante dado que permite eliminar la hipótesis (estática) de que el proceso de ajuste es instantáneo e inevitablemente da lugar a un equilibrio. En un contexto dinámico, esta propiedad de estabilidad tiene que ser comprobada y no puede ser asumida a priori.

En lo que sigue consideraremos que el tiempo $t = 0, 1, \ldots$ es discreto. Una función $X : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dependiente del tiempo es simplemente una sucesión de vectores de n dimensiones

$$X_0, X_1, X_2, \ldots$$

Si cada vector está relacionado con el vector previo por medio de una aplicación $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de la forma

$$X_{t+1} = f(X_t), \qquad t = 0, 1, \ldots,$$

entonces estamos ante un *sistema de ecuaciones en diferencias de primer orden*. En la siguiente definición se generaliza a sistemas con un mayor período de retraso y que pueden incluir t explicítamente.

Definición 1.1. Un sistema de ecuaciones en diferencias de orden k es una expresión de la forma

$$X_{t+k} = f(X_{t+k-1}, \ldots, X_t, t), \qquad t = 0, 1, \ldots, \tag{1.1}$$

donde cada $X_t \in \mathbb{R}^n$ y $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}^n$. El sistema es:

- *autónomo*, si f no depende de t;
- *lineal*, si la aplicación f es lineal en las variables $(X_{t+k-1}, \ldots, X_t)$;
- *de primer orden*, si $k = 1$.

Definición 1.2. Una sucesión $\{X_0, X_1, X_2, \ldots\}$ obtenida mediante la recursión (1.1) con valor inicial X_0 es una trayectoria u órbita del sistema dinámico con origen en X_0.

En lo sucesivo escribiremos x_t en lugar de X_t si la variable X_t es un escalar.

Ejemplo 1.3. [Progresiones geométricas y aritméticas] Sea $\{x_t\}$ ls sucesión de números reales definida por $x_{t+1} = qx_t$, $t = 0, 1, \ldots$, con $q \in \mathbb{R}$. Se trata de una ecuación en diferencias de primer orden, autónoma y lineal. La solución es obviamente $x_t = q^t x_0$. De forma análoga, para la progresión aritmética, $x_{t+1} = x_t + d$, con $d \in \mathbb{R}$, la solución es $x_t = x_0 + td$.

Ejemplo 1.4.

- $x_{t+1} = x_t + t$ es lineal, no autónoma y de primer orden;
- $x_{t+2} = -x_t$ es lineal, autónoma y de segundo orden;

- $x_{t+1} = x_t^2 + 1$ es no lineal, autónoma y de primer orden.

Ejemplo 1.5. [Números de Fibonacci (1202)] "Cuántas parejas de conejos habrá al cabo de un año, a partir de una única pareja, si todos los meses cada pareja procrea una nueva pareja que se vuelve productiva a partir del segundo mes?". Si x_t denota el número de parejas de conejos en el mes t, entonces el problema puede planterase como

$$x_{t+2} = x_{t+1} + x_t, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots, \text{ con } x_0 = 1 \text{ y } x_1 = 1.$$

Esta ecuación en diferencias autónoma y de segundo orden será resuelta más adelante.

2. Sistemas de ecuaciones en diferencias de primer orden

Los sistemas de orden superior $k > 1$ pueden reducirse a sistemas de primer orden al introducir nuevas variables. Esta es la razón por la que estudiamos principalmente sistemas de primer orden. En lugar de describir el método general, presentaremos un ejemplo sencillo de cómo esta reducción puede realizarse.

Ejemplo 2.1. Se considera la ecuación en diferencias de segundo orden $y_{t+2} = g(y_{t+1}, y_t)$. Si definimos $x_{1,t} = y_{t+1}$, $x_{2,t} = y_t$, entonces $x_{2,t+1} = y_{t+1} = x_{1,t}$ y obtenemos el sistema de primer orden dado por:

$$\begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(x_{1,t}, x_{2,t}) \\ x_{1,t} \end{pmatrix}.$$

Denotando $X_t = \begin{pmatrix} x_{1,t} \\ x_{2,t} \end{pmatrix}$, $f(X_t) = \begin{pmatrix} g(X_t) \\ x_{1,t} \end{pmatrix}$, el sistema puede reescribirse en la forma $X_{t+1} = f(X_t)$.

Por ejemplo, la ecuación de segundo orden $y_{t+2} = 4y_{t+1} + y_t^2 + 1$ puede reducirse al sistema de primer orden

$$\begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_{1,t} + x_{2,t}^2 + 1 \\ x_{1,t} \end{pmatrix},$$

así como la ecuación de Fibonacci del Ejemplo 1.5 se transforma en

$$\begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{1,t} + x_{2,t} \\ x_{1,t} \end{pmatrix},$$

Dada una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, utilizaremos la siguiente notación: f^t denota la composición de f con ella misma t veces, es decir, $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$ y, en general, $f^t = f \circ f^{t-1}$ para $t = 1, 2, \ldots$. También definimos f^0 como la función identidad, $f^0(X) = X$.

Teorema 2.2. *Sea el sistema autónomo de primer orden $X_{t+1} = f(X_t)$ para el que existe un subconjunto D tal que para todo $X \in D$, $f(X, t) \subseteq D$. Entonces, dada cualquier condición inicial $X_0 \in D$, la sucesión $\{X_t\}$ está dada por*

$$X_t = f^t(X_0).$$

Demostración. La prueba es inmediata observando que

$$\begin{aligned}
X_1 &= f(X_0),\\
X_2 &= f(X_1) = f(f(X_0)) = f^2(X_0),\\
&\vdots\\
X_t &= f(f \cdots f(X_0) \cdots)) = f^t(X_0).
\end{aligned}$$

□

El teorema proporciona el valor actual de X, X_t, en función de la condición inicial, X_0. Aunque esto es interesante, muy a menudo la expresión $X_t = f^t(X_0)$, es meramente formal, puesto que f^t no es fácilmente computable. En estos casos, nos interesa más conocer el comportamiento de X_t en el largo plazo, es decir, conocer el límite (si existe)

$$\lim_{t\to\infty} f^t(X_0).$$

Generalmente es más útil estudiar este límite que obtener una expresión analítica de X_t. A pesar de todo, existen casos donde la solución puede encontrarse explícitamente y que permiten un estudio detallado del límite anterior.

Si el límite existe, $\lim_{t\to\infty} f^t(X_0) = X^0$, y f es continua, entonces

$$f(X^0) = f(\lim_{t\to\infty} f^t(X_0)) = \lim_{t\to\infty} f^{t+1}(X_0) = X^0.$$

Por tanto, el límite X^0 resulta ser un *punto fijo* de la función f. Esta es la razón por la que los puntos fijos de f juegan un papel muy relevante en el estudio de los sistemas dinámicos.

Definición 2.3. Un punto $X^0 \in D$ es un punto fijo del sistema dinámico definido por f si comenzando desde X^0, $X_t = X_0$ es una solución:

$$\text{Si } X_0 = X^0, \text{ entonces } X_t = X^0, \qquad t = 1, 2, \ldots .$$

Obviamente, X^0 es también un punto fijo de la aplicación f. Otras denominaciones para punto fijo son: *equilibrio*, *punto estacionario*, o *estado estacionario.*

Ejemplo 2.4. En el Ejemplo 1.3 ($x_{t+1} = qx_t$), si $q = 1$, entonces todo número real es un punto fijo de la ecuación; si $q \neq 1$, entonces existe un único punto fijo: $x^0 = 0$. Notar que la solución $x_t = q^t x_0$ tiene el siguiente límite dependiendo del valor de q (se supone que $x_0 \neq 0$).

$$\begin{aligned}
-1 < q < 1 &\Rightarrow \lim_{t\to\infty} q^t x_0 = 0,\\
q = 1 &\Rightarrow \lim_{t\to\infty} q^t x_0 = x_0,\\
q \leq -1 &\Rightarrow \text{ la sucesión oscila entre } + \text{ y } - \text{ y el límite no existe},\\
q > 1 &\Rightarrow \lim_{t\to\infty} q^t x_0 = \pm\infty, \text{ el signo depende del signo de } x_0.
\end{aligned}$$

En el Ejemplo 1.5, $x^0 = 0$ es el único punto fijo de la ecuación.

Para la ecuación en diferencias $x_{t+1} = x_t^2 - 6$, los puntos fijos son las solcuiones de $x = x^2 - 6$, es decir, $x^0 = -2$ y $x^0 = 3$. Sin embargo, se observa claramente que ninguna solución con $x_0 \neq -2$ o $x_0 \neq 6$ converge a ninguno de estos puntos. En realidad, $x_t \to \infty$ cuando $t \to \infty$.

En las definiciones siguientes, $\|X - Y\|$ denota la distancia Euclídea entre los vectores $X = (x_1, \ldots, x_n)$ y $Y = (y_1, \ldots, y_n)$:

$$\|X - Y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$

Por ejemplo, si $X = (1, 2, 3)$ y $Y = (3, 6, 7)$, entonces

$$\|X - Y\| = \sqrt{(3-1)^2 + (6-2)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{36} = 6.$$

Definición 2.5.

- Un punto fijo X^0 es estable si para cualquier estado inicial X_0 suficientemente próximo, la trayectoria asociada $\{X_t\}$ existe y permanece próxima a X^0, es decir, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $\|X_0 - X^0\| < \delta(\epsilon)$, entonces $\|X_t - X^0\| < \varepsilon$ para todo t.
- Un punto fijo estable X^0 es localmente asíntoticamente estable (l.a.e.) si la trayectoria $\{X_t\}$ con condición inicial X_0 suficientemente próxima a X^0converge al punto fijo, es decir, existe $\delta > 0$ tal que si $\|X_0 - X^0\| < \delta$, entonces $\lim_{t\to\infty} X_t = X^0$.
- Un punto fijo estable es globalmente asíntoticamente estable (g.a.e.) si cualquier trayectoria generada a partir de cualquier condición inicial X_0 converge a dicho punto fijo.
- Un punto fijo es inestable si no es estable o asíntoticamente estable.

Observación 2.6.

- g.a.e. $\Rightarrow$ l.a.e. $\Rightarrow$ estable.
- Si X^0 es estable, pero no l.a.e., entonces $\{X_t\}$ no converge a X^0.
- Un punto fijo g.a.e. es necesariamente único.
- Puede haber varios puntos fijos l.a.e.
- Si X^0 es l.a.e., entonces perturbaciones pequeñas alrededor de X^0 decaen y la trayectoria generada por el sistema retorna al punto fijo en el largo plazo.

Definición 2.7. Sea P un entero mayor que 1. Una serie de vectores $X_0, X_1, \ldots, X_{P-1}$ es un ciclo de período P (o P-ciclo simplemente) del sistema f si una trayectoria desde X_0 toma los valores $X_1, \ldots, X_{P-1}$ y retorna a X_0, es decir,

$$X_{t+1} = f(X_t), \qquad t = 0, 1, \ldots, P-1, \qquad X_P = X_0.$$

Observar que la serie de vectores $X_0, X_1, \ldots, X_P$ se repite periódicamente en la trayectoria,

$$\{X_t\} = \{X_0, X_1, \ldots, X_{P-1}, X_0, X_1, \ldots, X_{P-1}, \ldots\}.$$

Por esta razón, la trayectoria se designa también como un P–ciclo.

Ejemplo 2.8. En el Ejemplo 1.3 ($x_{t+1} = qx_t$) con $q = -1$ todas las trayectorias son 2–ciclos, porque la solución es

$$\{x_0, -x_0, x_0, -x_0, \ldots\}.$$

Ejemplo 2.9. En el Ejemplo 1.4 donde $y_{t+2} = -y_t$, para encontrar los posibles ciclos de la ecuación, primero es necesario escribirla como un sistema de orden 1, para lo que utilizamos el Ejemplo 2.1,

$$X_{t+1} = \begin{pmatrix} x_{1,t+1} \\ x_{2,t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_{2,t} \\ x_{1,t} \end{pmatrix} \equiv f(X_t).$$

Sea $X_0 = (2, 4)$. Entonces

$$\begin{aligned} X_1 &= f(X_0) = (-4, 2), \\ X_2 &= f(X_1) = (-2, -4), \\ X_3 &= f(X_2) = (4, -2), \\ X_4 &= f(X_3) = (2, 4) = X_0. \end{aligned}$$

Por tanto, aparece un 4–ciclo que comienza en X_0. De hecho, cualquier trayectoria es un 4–ciclo.

3. Ecuación lineal de primer orden

La ecuación lineal de orden uno es de la forma

$$x_{t+1} = ax_t + b, \qquad x_t \in \mathbb{R}, \qquad a, b \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Consideramos primero $b = 0$ (caso homogéneo). Entonces, el Teorema 2.2 proporciona la solución $x_t = a^t x_0$, $t = 0, 1, \ldots$. El caso no homogéneo $b \neq 0$ será reducido a éste de la siguiente manera: los puntos fijos de la ecuación son las soluciones de (ver Definición 2.3)

$$x^0 = ax^0 + b,$$

luego no existen puntos fijos si $a = 1$. Sin embargo, cuando $a \neq 1$ el (único) punto fijo es

$$x^0 = \frac{b}{1-a}.$$

Definiendo ahora $y_t = x_t - x^0$ y reemplazando $x_t = y_t + x^0$ en (3.1) obtenemos

$$y_{t+1} = ay_t,$$

que tiene solución $y_t = a^t y_0$. Volviendo a la variable x_t, la solución de la ecuación lineal es

$$\begin{aligned} x_t &= x^0 + a^t(x_0 - x^0) \\ &= \frac{b}{1-a} + a^t \left(x_0 - \frac{b}{1-a} \right). \end{aligned}$$

Finalmente, si $a = 1$ la solución es $x_t = x_0 + bt$, $t = 0, 1, \ldots$.

Teorema 3.1. *Para la ecuación* (3.1)*, el único punto fijo* $x^0 = \frac{b}{1-a}$ *es g.a.e. sii* $|a| < 1$.

Demostración. Notar que $\lim_{t\to\infty} a^t = 0$ sii $|a| < 1$ y, por tanto, $\lim_{t\to\infty} x_t = \lim_{t\to\infty} x^0 + a^t(x_0 - x^0) = x^0$ sii $|a| < 1$, independientemente de la condición inicial x_0. □

La convergencia es monótona si $0 < a < 1$ y oscilante (la solución alterna valores positivos y negativos) si $-1 < a < 0$.

Ejemplo 3.2 (Modelo del Multiplicador–Acelerador del Crecimiento)**.** Sea Y_t la renta nacional, I_t la inversión total, y S_t el ahorro total—todas las variables en el período t. Se supone que los ahorros son proporcionales al nivel de la renta nacional y que la inversión es proporcional al cambio en el nivel de renta en dos períodos consecutivos. Entonces, para $t = 0, 1, \ldots,$

$$\begin{aligned} S_t &= \alpha Y_t, \\ I_{t+1} &= \beta(Y_{t+1} - Y_t), \\ S_t &= I_t. \end{aligned}$$

La última igualdad es una condición de equilibrio: el ahorro iguala a la inversión en cada período. Se supone $\beta > \alpha > 0$. Puede encontrarse una ecuación en diferencias para Y_t y resolverla de la siguiente forma. A partir de las ecuaciones primera y tercera, $I_t = \alpha Y_t$ y, por tanto, $I_{t+1} = \alpha Y_{t+1}$. Sustituyendo este valor en la segunda ecuación tenemos $\alpha Y_{t+1} = \beta(Y_{t+1} - Y_t)$, o $(\alpha - \beta)Y_{t+1} = -\beta Y_t$. En consecuencia

$$Y_{t+1} = \frac{\beta}{\beta - \alpha} Y_t = \left(1 + \frac{\alpha}{\beta - \alpha}\right) Y_t, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots.$$

La solución es

$$Y_t = \left(1 + \frac{\alpha}{\beta - \alpha}\right)^t Y_0, \qquad t = 0, 1, 2, \ldots.$$

Vemos que Y crece a la tasa constante $g = \alpha/(\beta - \alpha)$ en cada período, ya que $g = (Y_{t+1} - Y_t)/Y_t$.

Ejemplo 3.3 (El modelo de la telaraña)**.** Se considera un mercado con un único bien donde el nivel de producción debe fijarse con un período de antelación a la realización de la venta. Esta situación es típica en la producción agrícola, donde la siembra precede con bastante antelación a la recolección y la venta del producto. Suponemos que el nivel de producción en el período t se basa en el precio P_t, pero dado que el output no estará disponible hasta el período $t + 1$, la oferta está retrasada un período,

$$Q_{s,t+1} = S(P_t).$$

La demanda en el tiempo t se determina mediante una función que depende del precio P_t,

$$Q_{d,t} = D(P_t).$$

Suponiendo que tanto la oferta como la demanda son funciones que dependen linealmente del precio, es decir, $S(P) = -\gamma + \delta P$, $D(P) = \alpha - \beta P$ $(\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0)$ y que los mercados se vacían, tenemos las tres ecuaciones siguientes:

$$\begin{aligned} Q_{d,t} &= Q_{s,t}, \\ Q_{d,t+1} &= \alpha - \beta P_{t+1}, \\ Q_{s,t+1} &= -\gamma + \delta P_t. \end{aligned}$$

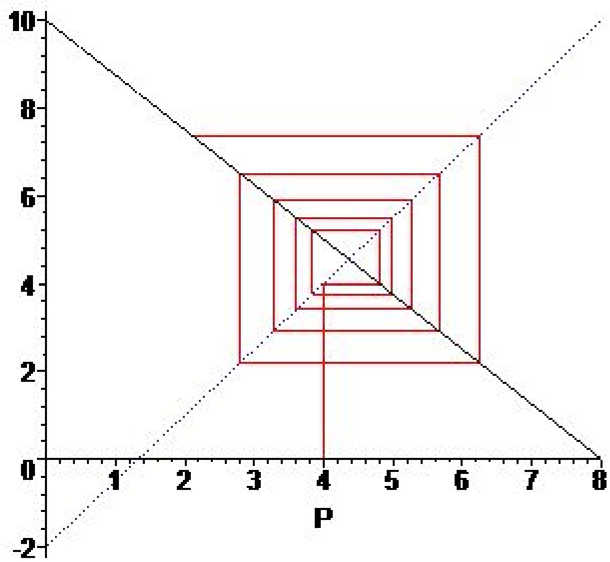

Figura 1. Diagrama de la telaraña con oscilaciones explosivas

Sustituyendo las dos últimas igualdades en la primera, ésta proporciona la siguiente ecuación en diferencias para el precio:

$$P_{t+1} = -\frac{\delta}{\beta} P_t + \frac{\alpha + \gamma}{\beta}.$$

El punto fijo es $P^0 = (\alpha + \gamma)/(\beta + \delta)$, que es también el precio de equilibrio del mercado, es decir, $S(P^0) = D(P^0)$. La solución es

$$P_{t+1} = P^0 + \left(-\frac{\delta}{\beta}\right)^t (P_0 - P^0).$$

Dado que $-\delta/\beta$ es negativa, la solución es oscilante. Este hecho da lugar al mecanismo de ajuste conocido como dinámica de la telaraña. Podemos distinguir tres tipos de oscilaciones: *explosiva* si $\delta > \beta$ (S tiene más inclinación que D), *uniforme* si $\delta = \beta$, y *amortiguadas* si $\delta < \beta$ (S más plana que D). Estas tres posibilidades se ilustran en las gráficas siguientes. La demanda tiene pendiente negativa $-\beta$, mientras que la oferta tiene pendiente positiva δ. Cuando $\delta > \beta$, como en la Figura 1, la interacción entre demanda y oferta da lugar a oscilaciones explosivas mediante el siguiente mecanismo: dado un precio inicial P_0, la cantidad de bien ofertada en el siguiente período será $Q_1 = S(P_0)$. Para vaciar el mercado se necesita que la cantidad demandada en el período 1 sea Q_1, para lo que el precio debe moverse hasta P_1 dado por la ecuación $Q_1 = D(P_1)$. Ahora, via la curva S, el precio P_1 da lugar a $Q_2 = S(P_1)$ como la cantidad ofertada en el período 2, y para vaciar el mercado, el precio debe ser el precio P_2 fijado por la curva de demanda. Repitiendo este razonamiento, surge una telaraña alrededor del punto de equilibrio.

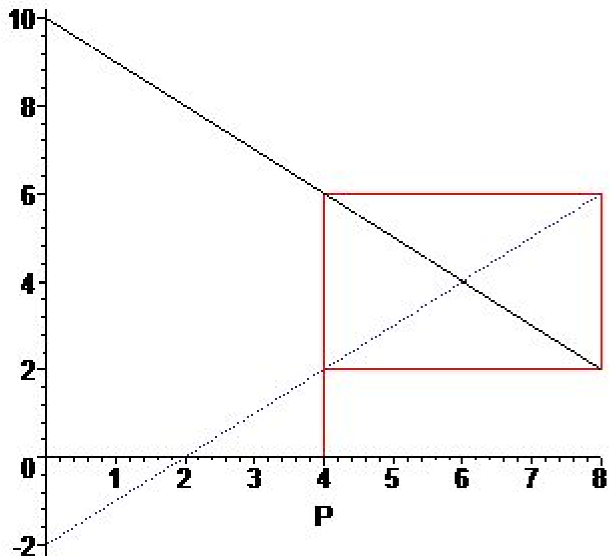

Figura 2. Diagrama de la telaraña con oscilaciones uniformes

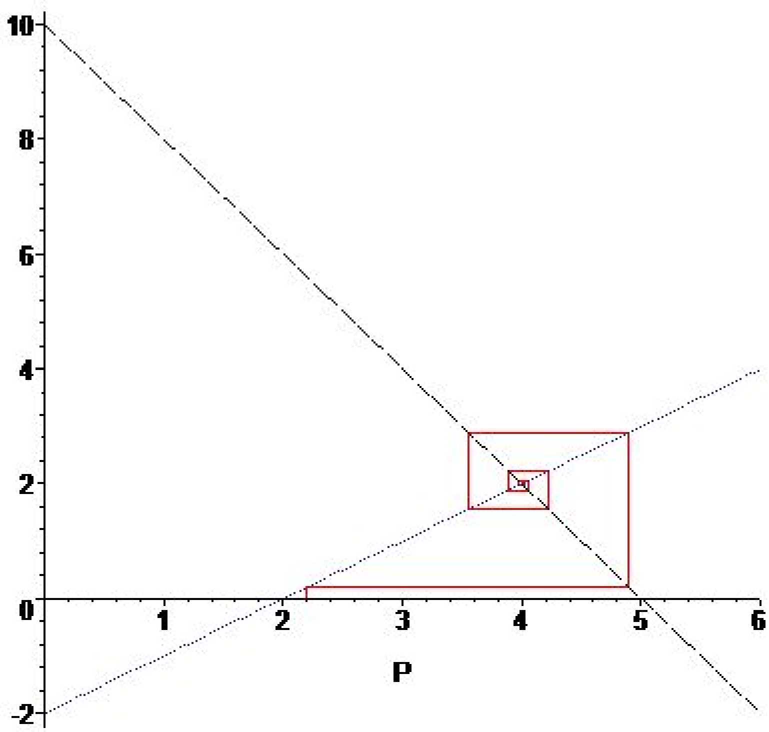

Figura 3. Diagrama de la telaraña con oscilaciones amortiguadas