HOJA 4: Derivadas de orden superior

4-1. Sea $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $u(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$. Calcula las cuatro parciales segundas, es decir el hessiano D^2u. Comprobar que se verifica la igualdad de las derivadas cruzadas.

4-2. Sea la función cuadrática $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $Q(x,y,z) = x^2 + 5y^2 + 4xy - 2yz$. Calcular la matriz hessiana D^2Q.

4-3. Dada $f(x,y,z) = e^z + \frac{1}{x} + xe^{-y}$, con $x \neq 0$, calcular:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

4-4. Sea $z = f(x,y)$, $x = at$, $y = bt$ donde a y b son constantes. Se considera z como una función de t. Hallar $\frac{d^2z}{dt^2}$ en términos de a, b y de las derivadas parciales de segundo orden de f: f_{xx}, f_{yy} y f_{xy}.

4-5. Sea $f(x,y) = 3x^2y + 4x^3y^4 - 7x^9y^4$. Calcular la matriz hessiana D^2Q.

4-6. Sean $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dos funciones cuyas derivadas parciales son continuas en todo $\mathbb{R}^2$ y tales que existe una función $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $(f,g) = \nabla h$, es decir,

$$f(x,y) = \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) \quad g(x,y) = \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)$$

para todos los puntos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. ¿Qué ecuación deben verificar

$$\frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{y} \ \frac{\partial g}{\partial x}?$$

4-7. La demanda de un consumidor está determinada por un sistema de ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \lambda p_1 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \lambda p_2 \\ p_1 x + p_2 y &= m \end{aligned}$$

donde $u(x,y)$ es la función de utilidad del agente, p_1 y p_2 son los precios de los bienes, m es la renta del agente y $\lambda \in \mathbb{R}$. Suponiendo que este sistema determina a x, y y λ en función del resto de los parámetros, calcular

$$\frac{\partial x}{\partial p_1}$$

4-8. Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} z^2 + t - xy &= 0 \\ zt + x^2 &= y^2 \end{aligned}$$

(a) Probar que este sistema de ecuaciones determina a z y t como funciones diferenciables de x, y en un entorno del punto $(1,0,1,-1)$.
(b) Calcular las derivadas parciales de z y t respecto a x, y en el punto $(1,0)$.
(c) Sin resolver el sistema, ¿cuál es el valor aproximado de $z(1'001, 0'002)$
(d) Calcular

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,0)$$

4-9. Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} xt^3 + z - y^2 &= 0 \\ 4zt &= x - 4 \end{aligned}$$

(a) Probar que este sistema de ecuaciones determina a z y t como funciones diferenciables de x, y en un entorno del punto $(0,1,1,-1)$.
(b) Calcular las derivadas parciales de z y t respecto a x, y en el punto $(0,1)$.
(c) Sin resolver el sistema, ¿cuál es el valor aproximado de $z(0'001, 1'002)$
(d) Calcular

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0,1)$$

4-10. Encontrar la aproximación polinómica de las siguientes funciones hasta el grado 2:
(a) $f(x,y) = \ln(1+x+2y)$ en $(2,1)$.
(b) $f(x,y) = x^3 + 3x^2y + 6xy^2 - 5x^2 + 3xy^2$ en $(1,2)$.
(c) $f(x,y) = e^{x+y}$ en $(0,0)$.
(d) $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy) + \cos(xy)$ en $(0,0)$.
(e) $f(x,y,z) = x - y^2 + xz$ en $(1,0,3)$.

4-11. Dada la forma cuadrática $Q(x,y,z) = x^2 - 2axy - 2xz + y^2 + 4yz + 5z^2$ ¿para qué valores del parámetro a es definida positiva?

4-12. Estudiar el signo de las siguientes formas cuadráticas por el método de los menores principales.
(a) $Q_1(x,y,z) = x^2 + 7y^2 + 8z^2 - 6xy + 4xz - 10yz$.
(b) $Q_2(x,y,z) = -2y^2 - z^2 + 2xy + 2xz + 4yz$.

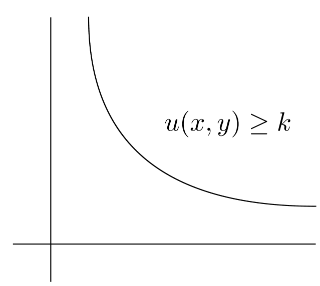
4-13. Estudiar los valores que debe tomar a para que la forma cuadrática $Q(x,y,z) = ax^2 + 4ay^2 + 4az^2 + 4xy + 2axz + 4yz$ sea:
(a) Definida positiva.
(b) Definida negativa.

4-14. Clasificar las siguientes formas cuadráticas dependiendo de los parámetros.

a) $Q(x,y,z) = 9x^2 + 3y^2 + z^2 + 2axz$

b) $Q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + bx_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_2x_3$

4-15. Sea $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función cóncava, es decir, para cualquier $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in [0,1]$, se verifica que $u(\lambda v_1 + (1-\lambda)v_2) \geq \lambda u(v_1) + (1-\lambda)u(v_2)$. Demuestra que $S = \{v \in \mathbb{R}^n : u(v) \geq k\}$ es un conjunto convexo. En particular, si $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es cóncava, la gráfica de la figura representa a $S = \{v = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : u(x,y) \geq k\}$.



4-16. ¿Cómo sería el enunciado del problema anterior para una función convexa $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$?

4-17. Determinar los conjuntos del plano donde las siguientes funciones son convexas o cóncavas:
(a) $f(x,y) = (x-1)^2 + xy^2$.
(b) $g(x,y) = \frac{x^3}{3} - 4xy + 12x + y^2$.
(c) $h(x,y) = e^{-x} + e^{-y}$.
(d) $k(x,y) = e^{xy}$.
(e) $l(x,y) = \ln\sqrt{xy}$.

4-18. Determinar en las siguientes funciones el valor de los parámetros para que sean convexas en todo su dominio.
(a) $f(x,y,z) = ax^2 + y^2 + 2z^2 - 4axy + 2yz$
(b) $g(x,y) = 4ax^2 + 8xy + by^2$

4-19. Discutir la concavidad o convexidad de la función $f(x, y) = -6x^2 + (2a + 4)xy - y^2 + 4ay$ según los valores del parámetro a.

4-20. Hallar el mayor conjunto convexo del plano en el que la función $f(x, y) = x^2 - y^2 - xy - x^3$ es cóncava.