## HOJA 4: Derivadas de orden superior

4-1. *Sea $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $u(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$. Calcula las cuatro parciales segundas, es decir el hessiano $D^2u$. Comprobar que se verifica la igualdad de las derivadas cruzadas.*

**Solución:** Las derivadas parciales de la función $u(x,y) = e^x \sin y$ son

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \sin y, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = e^x \cos y$$

y el Hessiano es

$$\begin{pmatrix} e^x \sin y & e^x \cos y \\ e^x \cos y & -e^x \sin y \end{pmatrix}$$

4-2. *Sea la función cuadrática $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $Q(x,y,z) = x^2 + 5y^2 + 4xy - 2yz$. Calcular la matriz hessiana $D^2Q$.*

**Solución:** El gradiente de $Q$ es

$$\nabla(x^2 + 5y^2 + 4xy - 2yz) = (2x + 4y, 10y + 4x - 2z, -2y)$$

El Hessiano es de $Q$ es

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 10 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

4-3. *Dada $f(x,y,z) = e^z + \frac{1}{x} + xe^{-y}$, con $x \neq 0$, calcular:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

**Solución:** Las derivadas que se piden de la función $f(x,y,z) = e^z + \frac{1}{x} + xe^{-y}$ son

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2} &= \frac{2}{x^3} \\ \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x \partial y} &= -\,e^{-y} \\ \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y \partial x} &= -\,e^{-y} \\ \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y^2} &= xe^{-y} \end{aligned}$$

4-4. *Sea $z = f(x,y)$, $x = at$, $y = bt$ donde $a$ y $b$ son constantes. Se considera $z$ como una función de $t$. Hallar $\frac{d^2 z}{dt^2}$ en términos de $a$, $b$ y de las derivadas parciales de segundo orden de $f$: $f_{xx}$, $f_{yy}$ y $f_{xy}$.*

**Solución:** Como la función es de clase $C^2$ las derivadas se puede aplicar el Teorema de Schwarz.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f(at,bt)) &= af_x\,(at,bt) + bf_y\,(at,bt) \\ \frac{d^2}{dt^2}(f(at,bt)) &= a^2 f_{xx}\,(at,bt) + 2abf_{xy}\,(at,bt) + b^2 f_{yy}\,(at,bt) \end{aligned}$$

4-5. *Sea* $f(x,y) = 3x^2y + 4x^3y^4 - 7x^9y^4$. *Calcular la matriz hessiana* $D^2Q$.

**Solución:** El gradiente de $f$ es

$$\nabla f(x,y) = \left(6xy + 12x^2y^4 - 63x^8y^4, 3x^2 + 16x^3y^3 - 28x^9y^3\right)$$

La matriz Hessiana de $f$ es

$$\mathrm{H}(x,y) = \begin{pmatrix} 6y + 24xy^4 - 504x^7y^4 & 6x + 48x^2y^3 - 252x^8y^3 \\ 6x + 48x^2y^3 - 252x^8y^3 & 48x^3y^2 - 74x^9y^2 \end{pmatrix}$$

4-6. *Sean* $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dos funciones cuyas derivadas parciales son continuas en todo* $\mathbb{R}^2$ *y tales que existe una función* $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *tal que* $(f,g) = \nabla h$, *es decir,*

$$f(x,y) = \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) \quad g(x,y) = \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)$$

*para todos los puntos* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. *¿Qué ecuación deben verificar*

$$\frac{\partial f}{\partial y} \quad y \ \frac{\partial g}{\partial x}?$$

**Solución:** Por un lado, tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}$$

Mientras que, por otro lado, tenemos que

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}$$

Como las funciones $f$ y $g$ tienen derivadas parciales continuas en todo $\mathbb{R}^2$, la función $h$ es de clase $C^2$. Por el Teorema de Schwartz, tenemos que

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}$$

es decir,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

4-7. *La demanda de un consumidor está determinada por un sistema de ecuaciones de la forma*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \lambda p_1 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \lambda p_2 \\ p_1 x + p_2 y &= m \end{aligned}$$

*donde* $u(x,y)$ *es la función de utilidad del agente,* $p_1$ *y* $p_2$ *son los precios de los bienes,* $m$ *es la renta del agente y* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Suponiendo que este sistema determina a* $x$, $y$ *y* $\lambda$ *en función del resto de los parámetros, calcular*

$$\frac{\partial x}{\partial p_1}$$

**Solución:** En primer lugar escribimos el sistema como

$$\begin{aligned} f_1 &\equiv \frac{\partial u}{\partial x} - \lambda p_1 = 0 \\ f_2 &\equiv \frac{\partial u}{\partial y} - \lambda p_2 = 0 \\ f_3 &\equiv p_1 x + p_2 y - m = 0 \end{aligned}$$

y calculamos

$$\frac{\partial\left(f_1, f_2, f_3\right)}{\partial\left(x, y, \lambda\right)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & -p_1 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & -p_2 \\ p_1 & p_2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} p_2^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} p_1 p_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} p_1^2$$

Suponemos que este determinante no se anula y que podemos aplicar el Teorema de la función implícita. Derivando respecto a $p_1$ (pero ahora suponemos que $x$, $y$, $\lambda$ son funciones de los demás parámetros) obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial p_1}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial p_1}-\frac{\partial \lambda}{\partial p_1}p_1-\lambda &= 0\\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial p_1}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial p_1}-\frac{\partial \lambda}{\partial p_1}p_2 &= 0\\ x+p_1\frac{\partial x}{\partial p_1}+p_2\frac{\partial y}{\partial p_1}=0\end{aligned}$$

que podemos reescribir como

$$\begin{array}{ccl}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial p_1} & + & \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial p_1}-\frac{\partial \lambda}{\partial p_1}p_1=\lambda\\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial p_1} & + & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial p_1}-\frac{\partial \lambda}{\partial p_1}p_2=0\\ p_1\frac{\partial x}{\partial p_1} & + & p_2\frac{\partial y}{\partial p_1}=-x\end{array}$$

Las incógnitas del sistema son

$$\frac{\partial x}{\partial p_1},\quad \frac{\partial y}{\partial p_1},\quad \frac{\partial \lambda}{\partial p_1}$$

Vemos que el determinante del sistema es

$$\frac{\partial(f_1,f_2,f_3)}{\partial(x,y,\lambda)}$$

Aplicando la regla de Cramer obtenemos,

$$\frac{\partial x}{\partial p_1}=\frac{\begin{vmatrix}\lambda & \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} & -p_1\\ 0 & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & -p_2\\ -x & p_2 & 0\end{vmatrix}}{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}p_2^2-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}p_1p_2+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}p_1^2}=\frac{\lambda p_2^2+m\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}p_2-m\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}p_1}{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}p_2^2-\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}p_1p_2+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}p_1^2}$$

4-8. *Dado el sistema de ecuaciones*

$$\begin{aligned}z^2+t-xy &= 0\\ zt+x^2 &= y^2\end{aligned}$$

(a) *Probar que este sistema de ecuaciones determina a $z$ y $t$ como funciones diferenciables de $x$, $y$ en un entorno del punto $(1,0,1,-1)$.*
(b) *Calcular las derivadas parciales de $z$ y $t$ respecto a $x$, $y$ en el punto $(1,0)$.*
(c) *Sin resolver el sistema, ¿cuál es el valor aproximado de $z(1'001,0'002)$*
(d) *Calcular*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(1,0)$$

**Solución:**

(a) En primer lugar escribimos el sistema como

$$\begin{aligned}f_1 &\equiv z^2+t-xy=0\\ f_2 &\equiv zt+x^2-y^2=0\end{aligned}$$

y calculamos

$$\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(z,t)}=\begin{vmatrix}2z & 1\\ t & z\end{vmatrix}=2z^2-t$$

que no se anula para $z=1$, $t=-1$. Por tanto, podemos aplicar el Teorema de la función implícita. Derivando el sistema implícitamente respecto a $x$ obtenemos

$$\begin{aligned}2z\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial t}{\partial x}-y &= 0\\ t\frac{\partial z}{\partial x}+z\frac{\partial t}{\partial x}+2x &= 0\end{aligned}$$

Ahora sustituimos los valores $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$ , $t = -1$. Obtenemos

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial z}{\partial x}(1,0) \quad &+ \quad \frac{\partial t}{\partial x}(1,0) = 0 \\ -\frac{\partial z}{\partial x}(1,0) \quad &+ \quad \frac{\partial t}{\partial x}(1,0) = -2 \end{aligned}$$

por lo que

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,0) = \frac{2}{3}, \quad \frac{\partial t}{\partial x} = -\frac{4}{3}$$

Derivando el sistema implícitamente respecto a $y$ obtenemos

(1)
$$\begin{aligned} 2z\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial y} - x \quad &= \quad 0 \\ t\frac{\partial z}{\partial y} + z\frac{\partial t}{\partial y} - 2y \quad &= \quad 0 \end{aligned}$$

Ahora sustituimos los valores $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$ , $t = -1$. Obtenemos

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial z}{\partial y}(1,0) + \frac{\partial t}{\partial y}(1,0) \quad &= \quad 1 \\ -\frac{\partial z}{\partial y}(1,0) + \frac{\partial t}{\partial y}(1,0) \quad &= \quad 0 \end{aligned}$$

por lo que

$$\frac{\partial z}{\partial y}(1,0) = \frac{1}{3}, \quad \frac{\partial t}{\partial y}(1,0) = \frac{1}{3}$$

(b) Usamos la aproximación de Taylor de primer orden alrededor el punto $(1, 0)$

$$P_1(x,y) = z(1,0) + \frac{\partial z}{\partial x}(1,0)(x-1) + \frac{\partial z}{\partial y}(1,0)y = 1 + \frac{2}{3}(x-1) + \frac{y}{3}$$

y obtenemos

$$z(1'001, 0'002) \approx P(1'001, 0'002) = 1 + \frac{0'002}{3} + \frac{0'002}{3} = 1'00133$$

(c) Derivamos implícitamente el sistema **??** respecto a $x$,

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + 2z\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} - 1 \quad &= \quad 0 \\ \frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + t\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial t}{\partial y} + z\frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} \quad &= \quad 0 \end{aligned}$$

Ahora sustituimos los valores

$$x = 1, \quad y = 0, \quad z = 1, \quad t = -1, \quad \frac{\partial z}{\partial x}(1,0) = \frac{2}{3}, \quad \frac{\partial t}{\partial x} = -\frac{4}{3}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(1,0) = \frac{1}{3}, \quad \frac{\partial t}{\partial y} = \frac{1}{3}$$

con lo que queda el sistema

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,0) + \frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y}(1,0) \quad &= \quad \frac{5}{9} \\ -\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,0)\frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y}(1,0) \quad &= \quad \frac{2}{9} \end{aligned}$$

y resolviendo este sistema obtenemos

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y}(1,0) = \frac{3}{9}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(1,0) = \frac{1}{9}$$

4-9. *Dado el sistema de ecuaciones*

$$\begin{aligned} xt^3 + z - y^2 \quad &= \quad 0 \\ 4zt \quad &= \quad x - 4 \end{aligned}$$

(a) *Probar que este sistema de ecuaciones determina a $z$ y $t$ como funciones diferenciables de $x$, $y$ en un entorno del punto $(0, 1, 1, -1)$.*
(b) *Calcular las derivadas parciales de $z$ y $t$ respecto a $x$, $y$ en el punto $(0, 1)$.*
(c) *Sin resolver el sistema, ¿cuál es el valor aproximado de $z(0'001, 1'002)$*

(d) *Calcular*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0,1)$$

**Solución:**

(a) En primer lugar escribimos el sistema como

$$\begin{aligned} f_1 &\equiv xt^3 + z - y^2 = 0 \\ f_2 &\equiv 4zt - x + 4 = 0 \end{aligned}$$

y calculamos

$$\frac{\partial\left(f_1, f_2\right)}{\partial\left(z, t\right)} = \begin{vmatrix} 1 & 3xt^2 \\ 4t & 4z \end{vmatrix} = 4z - 12xt^3$$

que no se anula para $x = 0, y = 1, z = 1, t = -1$. Por tanto, podemos aplicar el Teorema de la función implícita.

Derivando el sistema implícitamente respecto a $x$ obtenemos

$$\begin{aligned} t^3 + 3xt^2\frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} &= 0 \\ 4t\frac{\partial z}{\partial x} + 4z\frac{\partial t}{\partial x} - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Ahora sustituimos los valores $x = 0, y = 1, z = 1, t = -1$. Obtenemos

$$\begin{aligned} -1 + + \frac{\partial z}{\partial x}(0,1) &= 0 \\ -4\frac{\partial z}{\partial x}(0,1) + 4\frac{\partial t}{\partial x}(0,1) - 1 &= 0 \end{aligned}$$

por lo que

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,1) = 1, \quad \frac{\partial t}{\partial x}(0,1) = \frac{5}{4}$$

Derivando el sistema implícitamente respecto a $y$ obtenemos

(2)
$$\begin{aligned} 3xt^2\frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial y} - 2y &= 0 \\ t\frac{\partial z}{\partial y} + z\frac{\partial t}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

Ahora sustituimos los valores $x = 0, y = 1, z = 1, t = -1$. Obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y}(0,1) - 2 &= 0 \\ -\frac{\partial z}{\partial y}(0,1) + \frac{\partial t}{\partial y}(0,1) &= 0 \end{aligned}$$

por lo que

$$\frac{\partial z}{\partial y}(0,1) = 2, \quad \frac{\partial t}{\partial y}(0,1) = 2$$

(b) Usamos la aproximación de Taylor de primer orden alrededor el punto $(0,1)$,

$$P_1(x,y) = z(0,1) + \frac{\partial z}{\partial x}(0,1)x + \frac{\partial z}{\partial y}(0,1)(y-1) = x + 2y - 1$$

y obtenemos

$$z(0'001, 1'002) \approx P(0'001, 1'002) = 0'001 + 2'004 - 1 = 1'005$$

(c) Derivamos implícitamente el sistema **??** respecto a $x$,

$$\begin{aligned} 3t^2\frac{\partial t}{\partial y} + 6xt\frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial t}{\partial y} + 3xt^2\frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= 0 \\ \frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + t\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial t}{\partial y} + z\frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} &= 0 \end{aligned}$$

Ahora sustituimos los valores

$$x = 0, y = 1, z = 1, t = -1, \quad \frac{\partial z}{\partial x}(0,1) = 1, \quad \frac{\partial t}{\partial x}(0,1) = \frac{5}{4}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}(0,1) = 2, \quad \frac{\partial t}{\partial y}(0,1) = 2$$

con lo que queda el sistema

$$\begin{aligned} 6+\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0,1) &= 0 \\ \frac{9}{2}-\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}+\frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} &= 0 \end{aligned}$$

y resolviendo este sistema obtenemos

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y}(0,1)=-\frac{21}{2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0,1)=-6$$

4-10. *Encontrar la aproximación polinómica de las siguientes funciones hasta el grado 2:*
(a) $f(x,y)=\ln(1+x+2y)$ *en* $(2,1)$.
(b) $f(x,y)=x^3+3x^2y+6xy^2-5x^2+3xy^2$ *en* $(1,2)$.
(c) $f(x,y)=e^{x+y}$ *en* $(0,0)$.
(d) $f(x,y)=\operatorname{sen}(xy)+\cos(xy)$ *en* $(0,0)$.
(e) $f(x,y,z)=x-y^2+xz$ *en* $(1,0,3)$.

**Solución:** El polinomio de Taylor de orden 2 de $f$ alrededor del punto $x_0$ es

$$P_2(x)=f(x_0)+\nabla f(x_0)\cdot(x-x_0)+\frac{1}{2!}(x-x_0)^t Hf(x_0)(x-x_0)$$

(a) $f(x,y)=\log(1+x+2y)$ en $(2,1)$. Como,

$$\nabla f(2,1)=\left(\frac{1}{1+x+2y},\frac{2}{1+x+2y}\right)\Big|_{x=2,y=1}=\left(\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right)$$

el Hessiano es

$$\left(\begin{array}{cc} -\frac{1}{(1+x+2y)^2} & -\frac{2}{(1+x+2y)^2} \\ -\frac{2}{(1+x+2y)^2} & -\frac{4}{(1+x+2y)^2} \end{array}\right)\Big|_{x=2,y=1}=\left(\begin{array}{cc} -\frac{1}{25} & -\frac{2}{25} \\ -\frac{2}{25} & -\frac{4}{25} \end{array}\right)$$

y

$$f(2,1)=\ln 5$$

el polinomio de Taylor es

$$P_2(x)=\ln 5+\frac{1}{5}(x-2)+\frac{2}{5}(y-1)+-\frac{1}{50}(x-2)^2-\frac{2}{25}(x-2)(y-1)-\frac{2}{25}(y-1)^2$$

(b) $f(x,y)=x^3+3x^2y+6xy^2-5x^2+3xy^2$ en $(1,2)$. Como,

$$\nabla f(1,2)=\left(3x^2+6yx+9y^2-10x,3x^2+18yx\right)\big|_{x=1,y=2}=(41,39)$$

y el Hessiano es

$$\left(\begin{array}{cc} 6x+6y-10 & 6x+18y \\ 6x+18y & 18x \end{array}\right)\Big|_{x=1,y=2}=\left(\begin{array}{cc} 8 & 42 \\ 42 & 18 \end{array}\right)$$

y

$$f(1,2)=38$$

el polinomio de Taylor es

$$P_2(x)=38+41(x-1)+39(y-2)+4(x-1)^2+42(x-1)(y-2)+9(y-2)^2$$

(c) $f(x,y)=e^{x+y}$ en el punto $(0,0)$. Tenemos que $f(0,0)=1$. El gradiente es

$$\nabla f(0,0)=\left(e^{x+y},e^{x+y}\right)\big|_{x=0,y=0}=(e^0,e^0)]$$

y el Hessiano es

$$\left(\begin{array}{cc} e^{x+y} & e^{x+y} \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{array}\right)\Big|_{x=0,y=0}=\left(\begin{array}{cc} e^0 & e^0 \\ e^0 & e^0 \end{array}\right)$$

El polinomio de Taylor es

$$P_2(x)=1+1x+1y+\frac{1}{2!}(1x^2+2xy+y^2)=1+x+y+\frac{1}{2}x^2+yx+\frac{1}{2}y^2$$

(d) $f(x,y)=\sin(xy)+\cos(xy)$ en el punto $(0,0)$. Por una parte, $f(0,0)=1$. El gradiente es

$$\nabla f(0,0)=\left((\cos yx)\,y-(\sin yx)\,y,(\cos yx)\,x-(\sin yx)\,x\right)|_{x=0,y=0}=(0,0)$$

Las derivadas segundas son

$$\frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}=-y^2\sin(yx)-y^2\cos(yx)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-yx\sin(yx)+\cos(yx)-yx\cos(yx)-\sin(yx)$$
$$\frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}=x^2-x^2\cos(yx)$$

y el Hessiano en el punto $(0,0)$ es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que el polinomio de Taylor es

$$P_2(x,y)=1+yx$$

(e) $f(x,y,z)=x-y^2+xz$ en el punto $(1,0,3)$. Por una parte, $f(1,0,3)=4$. El gradiente es

$$\nabla f(1,0,3)=\left(1+z,-2y,x\right)|_{x=1,y=0,z=3}=(4,0,1)$$

y el Hessiano es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que el polinomio de Taylor es

$$P_2(x,y,z)=4+4(x-1)+(z-3)+\frac{1}{2!}(-2y^2+2(x-1)(z-3))$$

4-11. *Dada la forma cuadrática $Q\left(x,y,z\right)=x^2-2axy-2xz+y^2+4yz+5z^2$ ¿para qué valores del parámetro $a$ es definida positiva?*

**Solución:** $Q(x,y,z)=x^2-2axy-2xz+y^2+4yz+5z^2$
Será definida positiva si los menores principales verifican $D_1>0, D_2>0, D_3>0$. Vamos a calcularlos.
$D_1=1$

$D_2=\begin{vmatrix} 1 & -a \\ -a & 1 \end{vmatrix}=1-a^2>0$ si y sólo si $|a|<1$.

$D_3=\begin{vmatrix} 1 & -a & -1 \\ -a & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}=-5a^2+4a=a(4-5a)>0$ si y sólo si $a\in(0,4/5)$.

Por tanto, sera definida positiva si $a\in(0,4/5)$. Si $a=0$ o $a=4/5$, entonces tenemos $D_1>0$, $D_2>0$, $D_3=0$, por lo que es semidefinida positiva, pero no definida positiva. Cuando $a\in(-\infty,0)\cup(\frac{4}{5},+\infty)$ se verifica que $D_1>0$, $D_3<0$ por lo que la forma cuadrática es indefinida.

4-12. *Estudiar el signo de las siguientes formas cuadráticas por el método de los menores principales.*
(a) $Q_1\left(x,y,z\right)=x^2+7y^2+8z^2-6xy+4xz-10yz$.
(b) $Q_2\left(x,y,z\right)=-2y^2-z^2+2xy+2xz+4yz$.

**Solución:** a) La matriz asociada a $Q_1$ es $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 7 & -5 \\ 2 & -5 & 8 \end{pmatrix}$. Calculamos $D_1=1>0$, $D_2=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 7 \end{vmatrix}=-2$ y $D_3=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 7 & -5 \\ 2 & -5 & 8 \end{vmatrix}=-9$. Por tanto, es indefinida. (No era necesario calcular $D_3$)

b) La matriz asociada a $Q_2$ es $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Vemos que $D_1=0$. Para poder aplicar el método de los menores principales, hacemos el cambio de variables $\bar{x}=z$, $\bar{z}=x$. Obtenemos

$$Q_2\left(\bar{x},y,\bar{z}\right)=-2y^2-\bar{x}^2+2\bar{z}y+2\bar{x}\bar{z}+4y\bar{x}$$

cuya matriz asociada es $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Los menores principales son $D_1 = -1$, $D_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2$. Por tanto, es indefinida.

Otra forma de hacer este ejercicio es la siguiente. Como $D_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$, pero $D_1 = 0$, $D_2 = -1$, por la proposición 3.13, la forma cuadrática es indefinida.

4-13. *Estudiar los valores que debe tomar $a$ para que la forma cuadrática $Q(x, y, z) = ax^2 + 4ay^2 + 4az^2 + 4xy + 2axz + 4yz$ sea:*
(a) *Definida positiva.*
(b) *Definida negativa.*

**Solución:** La matriz asociada a la forma cuadrática $Q(x, y, z) = ax^2 + 4ay^2 + 4az^2 + 4xy + 2axz + 4yz$ es

$$\begin{pmatrix} a & 2 & a \\ 2 & 4a & 2 \\ a & 2 & 4a \end{pmatrix}$$

(a) Estudiamos las condiciones para que los menores principales verifiquen
  (i) $D_1 = a > 0$
  (ii) $D_2 = \begin{vmatrix} a & 2 \\ 2 & 4a \end{vmatrix} = 4a^2 - 4 = 4(a^2 - 1) > 0$. Esta condición se verifica si y sólo si $|a| > 1$.
  (iii) $D_3 = \begin{vmatrix} a & 2 & a \\ 2 & 4a & 2 \\ a & 2 & 4a \end{vmatrix} = 12a^3 - 12a = 12a(a^2 - 1) > 0$.
  Asumiendo que $a > 0$, la condición $a(a^2 - 1) > 0$ se simplifica en que $(a^2 - 1) > 0$ que es equivalente a $|a| > 1$. Por tanto, $Q$ es definida positiva si $a > 1$.
(b) Estudiamos las condiciones para que los menores principales verifiquen
  (i) $D_1 = a < 0$.
  (ii) $D_2 = \begin{vmatrix} a & 2 \\ 2 & 4a \end{vmatrix} = 4a^2 - 4 = 4(a^2 - 1) > 0$ Esta condición se verifica si y sólo si $|a| > 1$.
  Asumiendo que $a < 0$, la condición $4(a^2 - 1) > 0$ se convierte en $a < -1$. Hemos visto en el apartado anterior que $D_3 = 12a(a^2 - 1) < 0$ si $a < -1$. Por tanto, $Q$ es definida negativa si $a < -1$.
  El razonamiento anterior demuestra que $Q$ is indefinida si $a \in (-1, 0) \cup (0, 1)$. Si $a = 0$, la forma cuadrática es $Q(x, y, z) = 4xy + 4yz$ y vemos que $Q(1, 1, 0) = 4 > 0$, $Q(1, -1, 0) = -4 < 0$, por lo que $Q$ es indefinida
  Para estudiar los casos $a = \pm 1$ hacemos el siguiente cambio de variables

$$\bar{x} = z, \quad \bar{y} = y, \quad \bar{z} = x$$

  con lo que obtenemos la forma cuadrática

$$Q(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = a\bar{z}^2 + 4a\bar{y}^2 + 4a\bar{x}^2 + 4\bar{z}\bar{y} + 2a\bar{z}\bar{x} + 4\bar{y}\bar{x} = 4a\bar{x}^2 + 4a\bar{y}^2 + a\bar{z}^2 + 4\bar{x}\bar{y} + 2a\bar{z}\bar{x} + 4\bar{y}\bar{x}$$

  cuya matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} 4a & 2 & a \\ 2 & 4a & 2 \\ a & 2 & a \end{pmatrix}$$

  Para esta matriz tenemos que

$$D_1 = 4a, D_2 = 16a^2 - 4, \quad D_3 = 12a(a^2 - 1)$$

  y vemos que para $a = 1$,

$$D_1 = 4, D_2 = 8, \quad D_3 = 0$$

  por lo que $Q$ es semidefinida positiva. Finalmente, para $a = -1$,

$$D_1 = -4, D_2 = 8, \quad D_3 = 0$$

  por lo que $Q$ es semidefinida negativa.

4-14. *Clasificar las siguientes formas cuadráticas dependiendo de los parámetros.*

$$\text{a) } Q(x,y,z) = 9x^2 + 3y^2 + z^2 + 2axz$$
$$\text{b) } Q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + bx_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_2x_3$$

**Solución:** a) La matriz asociada a $Q(x,y,z) = 9x^2 + 3y^2 + z^2 + 2axz$ es $\begin{pmatrix} 9 & 0 & a \\ 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculando los menores principales tenemos que son $D_1 = 9$, $D_2 = \begin{vmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 27$ y $D_3 = \begin{vmatrix} 9 & 0 & a \\ 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = 27 - 3a^2$. Por lo tanto, la forma cuadrática

(a) es DEFINIDA POSITIVA si $27 - 3a^2 > 0$, es decir si $-3 < a < 3$.
(b) no puede ser DEFINIDA NEGATIVA, ya que $D_1 = 9 > 0$.
(c) no puede ser SEMIDEFINIDA NEGATIVA, por la misma razón.
(d) es SEMIDEFINIDA POSITIVA si $27 - 3a^2 = 0$. Es decir si $a = -3$ $a = 3$.
(e) es INDEFINIDA si $27 - 3a^2 < 0$, es decir si $|a| > 3$.

b) La matriz asociada a $Q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + bx_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_2x_3$ es $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 4 & 1 \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}$. Calculando los menores principales tenemos que son $D_1 = 1 > 0$, $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 4 \end{vmatrix} = 4 - a^2$ y $D_3 = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 4 & 1 \\ 0 & 1 & b \end{vmatrix} = 4b - 1 - a^2b = b(4 - a^2) - 1$.

(a) Será DEF. POSIT. si

$$\left.\begin{array}{c} 4 - a^2 > 0 \\ 4b - 1 - a^2b > 0 \end{array}\right\}$$

de la primera desigualdad obtenemos la condición de que $-2 < a < 2$. De la segunda $b > \frac{1}{4-a^2}$, es decir

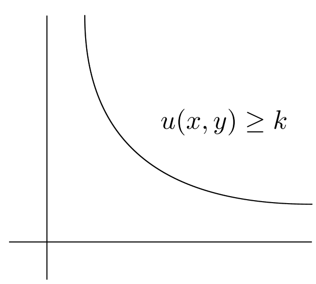
$$\left.\begin{array}{c} -2 < a < 2 \\ b > \frac{1}{4-a^2} \end{array}\right\}$$

(b) no puede ser DEF. NEG. ya que $D_1 = 1 > 0$
(c) no puede ser SEMIDEF. NEG por la misma razón.
(d) Si $a \in (-2,2)$ y $b = \frac{1}{4-a^2}$ entonces $D_3 = 4b - 1 - a^2b = 0$ por lo que es SEMIDEF. POS.
(e) Si $|a| > 2$ (es decir, $4 - a^2 < 0$), entonces es INDEF.
(f) Por último, si $|a| = 2$, obtenemos $\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 4 & 1 \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}$. Los menores principales son

$$D_1 = 1, \quad D_2 = 4 - a^2 = 0, \quad D_3 = 4b - 1 - a^2b = -1$$

por lo que la forma cuadrática es indefinida.

4-15. *Sea $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función cóncava, es decir, para cualquier $v_1$, $v_2 \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in [0,1]$, se verifica que $u(\lambda v_1 + (1-\lambda)v_2) \geq \lambda u(v_1) + (1-\lambda)u(v_2)$. Demuestra que $S = \{v \in \mathbb{R}^n : \ u(v) \geq k\}$ es un conjunto convexo. En particular, si $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es cóncava, la gráfica de la figura representa a $S = \{v = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ u(x,y) \geq k\}$.*




**Solución:** Sea $S = \{x \in \mathbb{R}^n : u(x) \geq k\}$. Sean $x, y \in S$, es decir, $u(x) \geq k$ y también $u(y) \geq k$. Dada una combinación de estos dos puntos, $x_c = \lambda x + (1-\lambda)y$ tenemos que

$$\begin{aligned} u(x_c) &= u(\lambda x + (1-\lambda)y) \\ &\geq \lambda u(x) + (1-\lambda)u(y) \qquad \text{ya que } u \text{ es cóncava} \\ &\geq \lambda k + (1-\lambda)k = k \end{aligned}$$

por tanto, $x_c \in S$ y $S$ es convexo.

4-16. *¿Cómo sería el enunciado del problema anterior para una función convexa $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$?*

**Solución:** Si $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función convexa, entonces, el conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \ u(x) \leq k\}$ es convexo.

4-17. *Determinar los conjuntos del plano donde las siguientes funciones son convexas o cóncavas:*
(a) $f(x, y) = (x-1)^2 + xy^2$.
(b) $g(x, y) = \frac{x^3}{3} - 4xy + 12x + y^2$.
(c) $h(x, y) = e^{-x} + e^{-y}$.
(d) $k(x, y) = e^{xy}$.
(e) $l(x, y) = \ln \sqrt{xy}$.

**Solución:**
(a) Primero observamos que si $x = 0$ entonces $f(0, y) = 1$ es constante. Por lo tanto, $f$ es cóncava y convexa en el conjunto $\{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$.
El Hessiano de $f(x, y) = (x-1)^2 + xy^2$ es

$$\begin{pmatrix} 2 & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

Vemos que $D_1 = 2 > 0$, $D_2 = 4(x - y^2)$. Como $D_1 > 0$ la función no es cóncava en ningún subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Vemos que $D_2 \geq 0$ si y sólo si $x \geq y^2$. La función es convexa en el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y^2\}$.
(b) El Hessiano de

$$f(x, y) = \frac{x^3}{3} - 4xy + 12x + y^2$$

es

$$\begin{pmatrix} 2x & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Vemos que $D_1 = 2x$, $D_2 = 4x - 16$. La función sería cóncava en los conjuntos convexos donde $D_1 < 0$ (y por tanto $x < 0$) y $D_2 \geq 0$ (y por tanto, $x \geq 4$). Como ambas condiciones son imposibles no es cóncava en ningún subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^2$.
Si $x > 0$ y $x \geq 4$ entonces $D_1 > 0$ y $D_2 \geq 0$ y vemos que la función es convexa en el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 4\}$.
(c) El Hessiano de $h(x, y) = e^{-x} + e^{-y}$ es

$$\begin{pmatrix} e^{-x} & 0 \\ 0 & e^{-y} \end{pmatrix}$$

Notamos que ambas derivadas segundas son siempre positivas y por tanto la función es convexa en todo $\mathbb{R}^2$.
(d) El Hessiano de $k(x, y) = e^{xy}$ es

$$e^{yx} \begin{pmatrix} y^2 & xy + 1 \\ xy + 1 & x^2 \end{pmatrix}$$

Como $e^{yx} > 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ el signo de la matriz anterior es el mismo que el signo de la matriz siguiente

$$\begin{pmatrix} y^2 & xy + 1 \\ xy + 1 & x^2 \end{pmatrix}$$

Para esta matriz obtenemos que $D_1 = y^2 \geq 0$, $D_2 = -1 - 2xy$. La función es convexa si $D_2 > 0$, es decir si $2xy < -1$. Por tanto, la función es convexa en el conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy < -1/2, x > 0\}$$

y también en el conjunto

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy < -1/2, x < 0\}$$

La unión $A \cup B$ no es un conjunto convexo.
Finalmente, en los conjuntos convexos, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0\}$ y $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$, la función es constante y por consiguiente, cóncava y convexa.

(e) El dominio de la función $l(x,y)=\ln(\sqrt{xy})$ es

$$\mathbb{R}^2_{++}\cup\mathbb{R}^2_{--}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x,y>0\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x,y<0\}$$

Si $x,y>0$, el Hessiano de

$$l(x,y)=\ln(\sqrt{xy})=\begin{cases}\frac{1}{2}(\ln x+\ln y), & \text{if } x,y>0;\\ \frac{1}{2}(\ln(-x)+\ln(-y)), & \text{if } x,y<0;\end{cases}$$

es

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\frac{-1}{x^2} & 0\\ 0 & \frac{-1}{y^2}\end{pmatrix}$$

Esta matriz es definida negativa y, por tanto, la función es cóncava en todo $\mathbb{R}^2_{++}$. Si $x,y<0$, el Hessiano de

$$f(x,y)=\ln(\sqrt{xy})=\frac{1}{2}\left(\ln(-x)+\ln(-y)\right)$$

es también

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\frac{-1}{x^2} & 0\\ 0 & \frac{-1}{y^2}\end{pmatrix}$$

Esta matriz es definida negativa y, por tanto, la función es también cóncava en todo $\mathbb{R}^2_{--}$ y en todo $\mathbb{R}^2_{++}$.

4-18. *Determinar en las siguientes funciones el valor de los parámetros para que sean convexas en todo su dominio.*
(a) $f(x,y,z)=ax^2+y^2+2z^2-4axy+2yz$
(b) $g(x,y)=4ax^2+8xy+by^2$

**Solución:**

(a) El Hessiano de $f(x,y,z)=ax^2+y^2+2z^2-4axy+2yz$ es

$$\begin{pmatrix}2a & -4a & 0\\ -4a & 2 & 2\\ 0 & 2 & 4\end{pmatrix}$$

Para que sea convexa necesitamos que la matriz sea semidefinida positiva. Observamos que

$$\begin{aligned} D_1 &= 2a\\ D_2 &= \begin{vmatrix}2a & -4a\\ -4a & 2\end{vmatrix} = 4a-16a^2=4a(1-4a)\\ D_3 &= \begin{vmatrix}2a & -4a & 0\\ -4a & 2 & 2\\ 0 & 2 & 4\end{vmatrix} = 8a-64a^2=8a(1-8a)\end{aligned}$$

Vemos que $D_1>0$ es equivalente a $a>0$. Y suponiendo que $a>0$, la condición $D_3>0$ es equivalente a $a<1/8$. Además, si $0<a<1/8$ entonces $D_2>0$, por lo que la función es estrictamente convexa si $0<a<1/8$. Por otra parte, si $a=0$ o $a=1/8$, el Hessiano es semidefinido positivo. Por tanto, la función es convexa si $0\le a\le 1/8$.

(b) El Hessiano de $g(x,y)=4ax^2+8xy+by^2$ es

$$\begin{pmatrix}8a & 8\\ 8 & 2b\end{pmatrix}$$

Observamos que

$$\begin{aligned} D_1 &= 8a\\ D_2 &= \begin{vmatrix}8a & 8\\ 8 & 2b\end{vmatrix} = 16(ab-4)\end{aligned}$$

Para que $g$ sea convexa necesitamos que el Hessiano sea semidefinido positivo. Es decir, la función es convexa si $a>0$ y $ab\ge 4$ (o equivalentemente si $a>0$ y $b\ge 4/a$.
Si $a=0$, entonces $D_1=0$, $D_2=-64\neq 0$. Y vemos que $\mathrm{H}\,h(x,y)$ es indefinida en todos los puntos $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ por lo que la función no es convexa en $\mathbb{R}^2$.
Si $a<0$, entonces $D_1<0$, por lo que $\mathrm{H}\,h(x,y)$ no puede ser ni definida positiva ni semidefinida positiva en ningún punto $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ y la función no es convexa en $\mathbb{R}^2$.

4-19. *Discutir la concavidad o convexidad de la función* $f(x,y) = -6x^2 + (2a+4)xy - y^2 + 4ay$ *según los valores del parámetro* $a$.

**Solución:** El Hessiano de $f(x,y) = -6x^2 + (2a+4)xy - y^2 + 4ay$ es

$$\begin{pmatrix} -12 & 2a+4 \\ 2a+4 & -2 \end{pmatrix}$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} D_1 =& -12 < 0 \\ D_2 =& \begin{vmatrix} -12 & 2a+4 \\ 2a+4 & -2 \end{vmatrix} = 8 - 4a^2 - 16a \end{aligned}$$

Como $D_1 < 0$ la función no puede ser convexa. Sería cóncava si $D_2 = 8 - 4a^2 - 16a \geq 0$. Las raíces de $8 - 4a^2 - 16a = 0$ son $-2 \pm \sqrt{6}$. Entonces, $D_2 \geq 0$ es equivalente a $-2 - \sqrt{6} \leq a \leq -2 + \sqrt{6}$. Por lo tanto, $f$ es cóncava si $a \in [-2 - \sqrt{6}, -2 + \sqrt{6}]$.

4-20. *Hallar el mayor conjunto convexo del plano en el que la función* $f(x,y) = x^2 - y^2 - xy - x^3$ *es cóncava.*

**Solución:** El Hessiano de $f(x,y) = x^2 - y^2 - xy - x^3$ es

$$\begin{pmatrix} 2-6x & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} D_1 =& 2 - 6x \\ D_2 =& 12x - 5 \end{aligned}$$

La condición $D_2 \geq 0$ es equivalente a $x \geq 5/12$. Como $5/12 > 1/3$, la condición anterior también garantiza que $D_1 < 0$. Por tanto, el mayor conjunto del plano en el que $f$ es cóncava es el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 5/12\}$.