HOJA 3: Derivadas parciales y diferenciación.

3-1. *Calcular* $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ *para las siguientes funciones.*
(a) $f(x,y) = x\cos x \operatorname{sen} y$
(b) $f(x,y) = e^{xy^2}$
(c) $f(x,y) = (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$

Solución:
(a) Las derivadas parciales de la función $f(x,y) = x(\cos x)(\sin y)$ son

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \cos x \sin y - x \sin x \sin y, \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x\cos x \cos y$$

(b) Las derivadas parciales de la función $f(x,y) = e^{xy^2}$ son

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y^2 e^{xy^2}, \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2xye^{xy^2}$$

(c) Las derivadas parciales de la función $f(x,y) = (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$ son

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2x\ln\left(x^2+y^2\right) + 2x, \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2y\ln\left(x^2+y^2\right) + 2y$$

3-2. *Determinar la productividad marginal de cada factor para la siguiente función de producción*

$$F(x,y,z) = 12x^{1/2}y^{1/3}z^{1/4}$$

Solución: Calculamos las derivadas parciales respecto a cada uno de los factores

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 6x^{-1/2}y^{1/3}z^{1/4} \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 4x^{1/2}y^{-2/3}z^{1/4} \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= 3x^{1/2}y^{1/3}z^{-3/4} \end{aligned}$$

3-3. *Calcular el gradiente de las siguientes funciones en el punto p indicado.*
(a) $f(x,y) = \left(a^2-x^2-y^2\right)^{1/2}$ *en* $p = (a/2, a/2)$.
(b) $g(x,y) = \ln(1+xy)^{1/2}$ *en* $p = (1,1)$.
(c) $h(x,y) = e^y\cos(3x+y)$ *en* $p = (2\pi/3, 0)$.

Solución:
(a) $\nabla(a^2-x^2-y^2)^{1/2} = \left(\frac{-x}{\sqrt{(a^2-x^2-y^2)}}, \frac{-y}{\sqrt{(a^2-x^2-y^2)}}\right)$ por lo que el gradiente es

$$\left(\frac{-x}{\sqrt{(a^2-x^2-y^2)}}, \frac{-y}{\sqrt{(a^2-x^2-y^2)}}\right)\Bigg|_{x=y=a/2} = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$$

(b) $\nabla(\ln(1+xy)^{1/2}) = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{1+xy}, \frac{x}{1+xy}\right)$ por lo que el gradiente en el punto pedido es $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.
(c)

$$\begin{aligned} &\nabla\left(e^y\cos(3x+y)\right)\big|_{x=2\pi/3,y=0} = \\ &= \left(-3e^y\sin(3x+y), e^y\cos(3x+y) - e^y\sin(3x+y)\right)\big|_{x=2\pi/3,y=0} = (0,1) \end{aligned}$$

3-4. *Sea la función:*

$$f(x,y) = \begin{cases} 2\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}\operatorname{sen}(xy) & si (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) *Calcular las derivadas parciales de f en el punto $(0,0)$.*

(b) *Comprobar que f es continua en $\mathbb{R}^2$.* (sug: *Utilizar (demostrando primero) que si $(x,y) \neq (0,0)$, entonces*

$$0 \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|+|y|} \leq 1)$$

(c) *¿Es f diferenciable en $(0,0)$?*

Solución:

(a) Las derivada parcial respecto a x es

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0$$

ya que $\operatorname{sen}(0) = 0$. Análogamente,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0$$

por lo que

$$\nabla f(0,0) = (0,0)$$

(b) Observamos que si $(x,y) \neq (0,0)$, la función f es un cociente de funciones continuas y, por lo tanto es continua en todos los puntos $(x,y) \neq (0,0)$.

Recordemos que la función f es continua en el punto $(0,0)$ si

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$$

Vamos a demostrar esto. En primer lugar, como $|x|,|y| \geq 0$

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &\leq |x|^2+|y|^2+2|x||y| \\ &= (|x|+|y|)^2 \end{aligned}$$

por lo que

$$0 \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|+|y|} \leq 1)$$

Dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta = \varepsilon/2$. Supongamos ahora que $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ y entonces tenemos que

$$\begin{aligned} |f(x,y)| =& 2\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}|\operatorname{sen}(xy)| \qquad (\text{ya que } |\operatorname{sen}(xy)| \leq 1) \\ \leq& 2\frac{x^2+y^2}{|x|+|y|} \\ =& 2\sqrt{x^2+y^2}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|x|+|y|} \qquad (\text{por la observación anterior}) \\ \leq& 2\sqrt{x^2+y^2}| < 2\delta = \varepsilon \end{aligned}$$

(c) En primer lugar, observamos que f es diferenciable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, ya que las parciales existen y son continuas en es conjunto.

La función es diferenciable en $(0,0)$ si

$$\lim_{(v_1,v_2)\to(0,0)} \frac{f(v_1,v_2)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(v_1,v_2)}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}} = 0$$

Observamos que $f(0,0) = 0$, $\nabla f(0,0)\cdot(v_1,v_2) = 0$. Así que consideramos el cociente

$$\frac{f(v_1,v_2)}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}} = 2\frac{v_1^2+v_2^2}{(|v_1|+|v_2|)\sqrt{v_1^2+v_2^2}}\operatorname{sen}(v_1v_2) = 2\frac{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}{(|v_1|+|v_2|)}\operatorname{sen}(v_1v_2)$$

con $(v_1,v_2) \neq (0,0)$. La función f es diferenciable en $(0,0)$ si

$$\lim_{(v_1,v_2)\to(0,0)} \frac{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}{(|v_1|+|v_2|)}\operatorname{sen}(v_1v_2) = 0$$

Por la observación hecha en el apartado anterior, tenemos que

$$0 \le \frac{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}{(|v_1|+|v_2|)}|\operatorname{sen}(v_1v_2)| \le |\operatorname{sen}(v_1v_2)|$$

y como $\operatorname{sen}(v_1v_2)$ es continua,

$$\lim_{(v_1,v_2)\to(0,0)} \operatorname{sen}(v_1v_2) = 0$$

por lo que

$$\lim_{(v_1,v_2)\to(0,0)} \frac{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}{(|v_1|+|v_2|)} \operatorname{sen}(v_1v_2) = 0$$

y f es diferenciable en $(0,0)$.

3-5. *Sea la función*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\operatorname{sen} y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

(a) *Estudia la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$.*
(b) *Calcula las derivadas parciales en el punto $(0,0)$.*
(c) *¿En qué puntos es diferenciable la función?*

Solución:

(a) Observamos que

$$\lim_{t\to0} f(t,0) = \lim_{t\to0}\frac{0}{t^2} = 0$$

Por otra parte,

$$\lim_{t\to0} f(t,t) = \lim_{t\to0}\frac{t\operatorname{sen} t}{2t^2} = \lim_{t\to0}\frac{\operatorname{sen} t}{2t} = \frac{1}{2}$$

como no coinciden, el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

no existe y, por tanto, f no es continua en $(0,0)$.
La función es continua en $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, ya que es un cociente de funciones continuas y el denominador no se anula.

(b) Las derivada parcial respecto a x es

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to0}\frac{0}{t^3} = 0$$

ya que $\operatorname{sen}(0)=0$. Análogamente,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to0}\frac{0}{t^3} = 0$$

(c) En primer lugar, observamos que f es diferenciable en $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, ya que las parciales existen y son continuas en es conjunto. La función no es diferenciable en $(0,0)$ ya que no es continua en ese punto.

3-6. *Sea la función*

$$f(x,y) = \begin{cases} 2\frac{x^3y}{x^2+2y^2}\cos(xy) & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

(a) *Calcular las derivadas parciales de f en el punto $(0,0)$.*
(b) *Comprobar que f es continua en $\mathbb{R}^2$. (*sug: *Observa que si $(x,y)\neq(0,0)$, entonces*

$$\frac{1}{x^2+2y^2} \le \frac{1}{x^2+y^2})$$

(c) *¿Es f diferenciable en $(0,0)$?*

Solución:

(a) Las derivadas parciales son

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to0}\frac{0}{t^3} = 0$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to0}\frac{0}{2t^3} = 0$$

(b) La función es continua en $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, ya que es un cociente de funciones continuas y el denominador no se anula. Estudiamos ahora la continuidad en $(0,0)$. Sea $\varepsilon > 0$. Tomamos $\delta = \sqrt{\varepsilon/2}$. Si $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ entonces,

$$\begin{aligned}\left|2\frac{x^3y}{x^2+2y^2}\cos(xy)\right| =& 2\frac{x^2|x||y|}{x^2+2y^2}|\cos(xy)| \\ \le& 2|x||y| \qquad (\text{porque } x^2 \le x^2+2y^2 \text{ y } |\cos(xy)| \le 1 \\ =& 2\sqrt{x^2}\sqrt{y^2} \le 2\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) < 2\delta^2 = \varepsilon\end{aligned}$$

(c) La función es diferenciable en $(0,0)$ si

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

Como $f(0,0) = 0$, $\nabla f(0,0)\cdot(x,y) = 0$, La función es diferenciable en $(0,0)$ si

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{(x^2+2y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\cos(xy) = 0$$

Dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta = \varepsilon$. Si $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ entonces,

$$\begin{aligned}\left|\frac{x^3y}{(x^2+2y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\cos(xy)\right| \le& \left|\frac{x^3y}{(x^2+2y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\right| \\ =& \frac{x^2|x||y|}{(x^2+2y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \\ \le& \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{x^2}\sqrt{y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \le& \sqrt{y^2} \le \sqrt{x^2+y^2} < \delta = \varepsilon\end{aligned}$$

por lo que f es diferenciable en $(0,0)$.

3-7. *Calcular las derivadas de las siguientes funciones en el punto p según el vector v indicados en cada caso.*
(a) $f(x,y) = x + 2xy - 3y^2$, *con* $p = (1,2)$, $v = (3,4)$
(b) $g(x,y) = e^{xy} + y\operatorname{arctg} x$, *con* $p = (1,1)$, $v = (1,-1)$
(c) $h(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^{1/2}$, *con* $p = (0,5)$, $v = (1,-1)$.

Solución:
(a) $\nabla(x+2xy-3y^2)\big|_{x=1,y=2} = (1+2y, 2x-6y)|_{x=1,y=2} = (5,-10)$. Por lo que la derivada según el vector $(3,4)$ es

$$(5,-10)\cdot(3,4) = -25$$

(b) $\nabla(e^{xy} + y\arctan x)|_{x=1,y=1} = \left(ye^{xy} + \frac{y}{1+x^2}, xe^{xy} + \arctan x\right)\Big|_{x=1,y=1} = (e+\frac{1}{2}, e+\arctan 1) = (e+\frac{1}{2}, e+\frac{\pi}{4})$. Por lo que la derivada según el vector $(1,-1)$ es

$$(e+\frac{1}{2}, e+\frac{\pi}{4})\cdot(1,-1) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$$

(c) $\nabla((x^2+y^2)^{1/2})\big|_{x=0,y=5} = \left(\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2)}}, \frac{y}{\sqrt{(x^2+y^2)}}\right)\Big|_{x=0,y=5} = (0,1)$. Por lo que la derivada según el vector $(1,-1)$ es

$$(0,1)\cdot(1,-1) = -1$$

3-8. *Sea $B(x,y) = 10x - x^2 - \frac{1}{2}xy + 5y$ los beneficios de una empresa. El año pasado vendió $x = 4$ unidades de la mercancía 1 e $y = 2$ unidades de la mercancía 2. Si este año desea aumentar sus ventas en una pequeña cantidad de la forma más beneficiosa posible, ¿a qué deberá ser igual $\frac{\Delta x}{\Delta y}$?*

Solución:

$$\nabla(10x - x^2 - \frac{xy}{2} + 5y)\Big|_{x=4,y=2} = \left(10 - 2x - \frac{y}{2}, -\frac{x}{2} + 5\right)\Big|_{x=4,y=2} = (1,3)$$

Como el gradiente indica la dirección de máximo crecimiento de la función, si hay un incremento $(\triangle x, \triangle y)$, para que ese aumento sea lo más beneficioso posible, se debe cumplir que $(\triangle x, \triangle y) = k(1,3)$. De ahí obtenemos que $\triangle x = k$ y $\triangle y = 3k$ y, por tanto, $\triangle x/\triangle y = 1/3$.

3-9. *Se sabe que* $\frac{\partial f}{\partial x}(2,3) = 7$ *y* $D_{(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})} f_{(2,3)} = 3\sqrt{5}$ *obtener* $\frac{\partial f}{\partial y}(2,3)$ *y* $D_v f_{(2,3)}$ *con* $v = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$.
Solución: Sabemos que

$$D_{(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})} f(2,3) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(2,3), \frac{\partial f}{\partial y}(2,3)\right) \cdot (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}) = 3\sqrt{5}$$

y que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,3) = 7$$

Llamando

$$z = \frac{\partial f}{\partial y}(2,3)$$

se debe cumplir que

$$(7, z) \cdot (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}) = 3\sqrt{5}$$

Y eso equivale a

$$\frac{7\sqrt{5}}{5} + \frac{2z\sqrt{5}}{5} = 3\sqrt{5}$$

y, por tanto

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,3) = 4$$

Ahora podemos calcular

$$D_{(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})} f(2,3) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(2,3), \frac{\partial f}{\partial y}(2,3)\right) \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = (7,4) \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \frac{37}{5}$$

3-10. *Dada la función* $f(x,y,z) = xy^2 + z^2 y$, *calcula la derivada según el vector* $v = (1,-1,2)$ *en el punto* $(1,1,0)$. *Determina la dirección para la que se maximiza (resp. minimiza) la derivada direccional en el punto* $(1,1,0)$, *así como su valor.*

Solución: El gradiente de la función $f(x,y,z) = xy^2 + z^2 y$ en el punto $(1,1,0)$ es

$$\nabla f(1,1,0) = \nabla(xy^2 + z^2 y)\big|_{x=1,y=1,z=0} = \big(y^2, 2xy + z^2, 2zy\big)\big|_{x=1,y=1,z=0} = (1,2,0)$$

La derivada según vector v es

$$D_v f(1,1,0) = \nabla f(1,1,0) \cdot v = (1,2,0) \cdot (1,-1,2) = -1$$

La dirección que maximiza la derivada direccional es

$$\frac{\nabla f(1,1,0)}{\|\nabla f(1,1,0)\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0)$$

y el valor máximo de la derivada direccional es $\|\nabla f(1,1,0)\| = \sqrt{5}$.
Análogamente, la dirección que minimiza la derivada direccional es

$$-\frac{\nabla f(1,1,0)}{\|\nabla f(1,1,0)\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,-2,0)$$

y el valor mínimo de la derivada direccional es $-\|\nabla f(1,1,0)\| = -\sqrt{5}$.

3-11. *Sea* $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$ *y* $g(x,y) = (x+y, ay)$ *determinar,*
(a) *El valor de* a *para que la función* $f \circ g$ *tenga como dirección de máximo crecimiento la del vector* $v = (5,7)$ *en el punto* $p = (1,1)$.
(b) *Las ecuaciones de la recta tangente y normal a la curva* $xy^2 - 2x^2 + y + 5x = 6$ *en el punto* $(4,2)$.

Solución: Consideramos las funciones $f(x,y) = x^2 + y^2 + 1$ y $g(x,y) = (x+y, ay)$

(a) La composición es $f(g(x,y)) = f(x+y, ay) = (x+y)^2 + a^2y^2 + 1$ y el gradiente en el punto $(1,1)$ es

$$\nabla(f(g(1,1)) = \left(2x+2y, 2x+2y+2a^2y\right)\big|_{x=1,y=1} = (4, 4+2a^2)$$

Para que $f(g(x,y))$ tenga en el punto $(1,1)$ como dirección de máximo crecimiento la del vector $v = (5,7)$, debe verificarse v y $\nabla(f(g(x,y))(1,1)$ sean paralelos. Es decir,

$$\frac{4+2a^2}{4} = \frac{7}{5}$$

cuya solución es

$$a = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$$

(b) Notemos primero que el punto $(4,2)$ satisface la ecuación $xy^2 - 2x^2 + y + 5x = 6$. Ahora, el gradiente de la función $g(x,y) = xy^2 - 2x^2 + y + 5x = 6$ en el punto $(4,2)$ es

$$\nabla g(4,2) = (y^2 - 4x + 5, 2xy + 1)\big|_{\substack{x=4\\y=2}} = (-7, 17)$$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente es

$$(-7,17)\cdot(x-4, y-2) = 0$$

y las ecuaciones paramétricas de la recta normal son

$$(x(t), y(t)) = (4,2) + t(-7,17)$$

3-12. *Calcular la matriz Jacobiana de F en los casos siguientes.*
(a) $F(x,y,z) = (xyz, x^2z)$
(b) $F(x,y) = (e^{xy}, \ln x)$
(c) $F(x,y,z) = (\operatorname{sen} xyz, xz)$

Solución:
(a) La matriz Jacobiana de F es

$$\mathrm{D}\,F(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ 2xz & 0 & x^2 \end{pmatrix}$$

(b) La matriz Jacobiana de F es

$$\mathrm{D}\,F(x,y,z) = \begin{pmatrix} ye^{xy} & xe^{xy} \\ 1/x & 0 \end{pmatrix}$$

(c) La matriz Jacobiana de F es

$$\mathrm{D}\,F(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz\cos xyz & xz\cos xyz & xy\cos xyz \\ z & 0 & x \end{pmatrix}$$

3-13. *Utilizando la regla de la cadena calcula las derivadas*

$$\frac{\partial z}{\partial r} \quad \frac{\partial z}{\partial \theta}$$

en los casos siguientes.
(a) $z = x^2 - 2xy + y^2,\ x = r + \theta,\ y = r - \theta$
(b) $z = \sqrt{25 - 5x^2 - 5y^2},\ x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$

Solución:
(a)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \\
&= 2x - 2y - 2x + 2y = 0 \\
\frac{\partial z}{\partial \theta} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} \\
&= 2x - 2y - (-2x + 2y) = 4(x-y) = 8\theta
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial r} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \\
&= -\frac{10x}{2\sqrt{25-5x^2-5y^2}}\cos\theta - \frac{10y}{2\sqrt{25-5x^2-5y^2}}\sin\theta \\
&= -\frac{5r\cos^2\theta}{\sqrt{25-5r^2}} - \frac{5r\sin^2\theta}{\sqrt{25-5r^2}} = -\frac{5r}{\sqrt{25-5r^2}} \\
\frac{\partial z}{\partial \theta} &= \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} \\
&= -\frac{10x}{\sqrt{25-5x^2-5y^2}} + \frac{10y}{\sqrt{25-5x^2-5y^2}} \\
&= -\frac{10x}{2\sqrt{25-5x^2-5y^2}}(-r\sin\theta) - \frac{10y}{2\sqrt{25-5x^2-5y^2}}(r\cos\theta) \\
&= \frac{5r^2\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{25-5r^2}} - \frac{5r^2\cos\theta\sin\theta}{\sqrt{25-5r^2}} = 0
\end{aligned}$$

3-14. *La utilización del capital K en el instante t genera unos beneficios en ese momento de*

$$B(t) = 5(1+t)^{1/2}K$$

Supongamos que el capital varía en el tiempo según la ecuación $K(t) = 120e^{t/4}$. Determinar la tasa de cambio de B.

Solución:
Como

$$\frac{dK}{dt} = 30e^{t/4}$$

vemos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}B = &= \frac{5}{2}(1+t)^{-1/2}K + 5(1+t)^{1/2}\frac{dK}{dt} \\
&= 300(1+t)^{-1/2}e^{t/4} + 150(1+t)^{1/2}e^{t/4}
\end{aligned}$$

3-15. *Verificar la regla de la cadena para la función $h = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ con $x = e^t$, $y = e^{t^2}$ y $z = e^{t^3}$.*

Solución: Tenemos $h(x,y,z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{x}{z}$ y $x(t) = e^t$, $y(t) = e^{t^2}$, $z(t) = e^{t^3}$. Sustituyendo,

$$\begin{aligned}
h(x(t),y(t),z(t)) &= \frac{e^t}{e^{t^2}} + \frac{e^{t^2}}{e^{t^3}} + \frac{e^t}{e^{t^3}} \\
&= e^{-t(-1+t)} + e^{-t^2(-1+t)} + e^{(-t(-1+t)(t+1))}
\end{aligned}$$

Ahora derivamos, $D_t(e^{-t(-1+t)} + e^{-t^2(-1+t)} + e^{(-t(-1+t)(t+1))}) = e^{-t(-1+t)} - 2e^{-t(-1+t)}t + 2e^{-t^2(-1+t)}t - 3e^{-t^2(-1+t)}t^2 + e^{(-t(-1+t)(t+1))} - 3e^{(-t(-1+t)(t+1))}t^2$. Etc.

$D_x(\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{\frac{\partial f(x)}{\partial x}g(x) - f(x)\frac{\partial g(x)}{\partial x}}{g^2(x)}$
$D_t(\frac{e^t}{e^{t^2}}) = e^{-t(-1+t)} - 2te^{-t(-1+t)}$
$D_t(\frac{e^{t^2}}{e^{t^3}}) = 2te^{-t^2(-1+t)} - 3t^2e^{-t^2(-1+t)}$
$D_t(\frac{e^t}{e^{t^3}}) = e^{(-t(-1+t)(t+1))} - 3t^2e^{(-t(-1+t)(t+1))}$

3-16. *Verificar la regla de la cadena para la composición $f \circ c$ en los casos.*

(a) $f(x,y) = xy$, $c(t) = (e^t, \cos t)$.
(b) $f(x,y) = e^{xy}$, $c(t) = (3t^2, t^3)$.

Solución:

(a) Las funciones son $f(x,y) = xy$ y $c(t) = (x(t), y(t)) = (e^t, \cos t)$. Por lo que, $f(x(t), y(t)) = f(e^t, \cos t) = e^t \cos t$ y

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = e^t \cos t - e^t \sin t$$

Ahora calculamos

$$\nabla f(c(t)) \cdot \frac{dc}{dt}$$

Por un parte,

$$\nabla f(x,y) = (y, x)$$

mientras que

$$\frac{dc}{dt} = (e^t, -\sin t)$$

Por tanto,

$$\nabla f(c(t)) \cdot \frac{dc}{dt} = y(t)e^t - x(t)\sin t$$

que coincide con lo que hemos encontrado más arriba.

(b) Las funciones son $f(x,y) = e^{xy}$ y $c(t) = (x(t), y(t)) = (3t^2, t^3)$. Por lo que, $f(x(t), y(t)) = f(3t^2, t^3) = e^{3t^5}$ y

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = 15t^4 e^{3t^5}$$

Ahora calculamos

$$\nabla f(c(t)) \cdot \frac{dc}{dt}$$

Por un parte,

$$\nabla f(x,y) = (ye^{xy}, xe^{xy})$$

mientras que

$$\frac{dc}{dt} = (6t, 3t^2)$$

Y por tanto,

$$\nabla f(c(t)) \cdot \frac{dc}{dt} = \left(6ye^{xy}t + 3xe^{xy}t^2\right)\Big|_{x=3t^2, y=t^3} = 15t^4 e^{3t^5}$$

3-17. *Expresar mediante la regla de la cadena $h'(x)$ en los siguientes casos.*
(a) $h(x) = f(x, u(x,a))$, *donde $a \in \mathbb{R}$ es un parámetro.*
(b) $h(x) = f(x, u(x), v(x))$.

Solución:
(a)

$$h'(x) = \frac{\partial f\,(x, u(x,a))}{\partial x} + \frac{\partial f\,(x, u(x,a))}{\partial y} \frac{\partial u(x,a)}{\partial x}$$

(b)

$$h'(x) = \frac{\partial f(x, u(x), v(x))}{\partial x} + \frac{\partial f(x, u(x), v(x))}{\partial y} u'(x) + \frac{\partial f(x, u(x), v(x))}{\partial z} v'(x)$$

3-18. *Determinar en qué puntos la superficie $z = e^{(x-1)^2+y^2}$ tiene un plano tangente horizontal y calcular su ecuación en esos puntos.*

Solución: Consideramos la función de 3 variables

$$g(x,y,z) = e^{(x-1)^2+y^2} - z$$

Nos piden el plano tangente a la superficie de nivel

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(x,y,z) = 0\}$$

en un punto (x,y,z) en el que ese plano sea horizontal. En ese punto debe verificarse

$$\nabla g(x,y,z) = (0, 0, -1)$$

Como,

$$\nabla g(x,y,z) = \left(2(x-1)e^{(x-1)^2+y^2}, 2ye^{(x-1)^2+y^2}, -1\right)$$

debe verificarse que $x = 1$, $y = 0$. La coordenada z es

$$z = e^{(x-1)^2+y^2}\Big|_{x=1, y=0} = 1$$

El plano tangente es horizontal en el punto $(1,0,1)$ y su ecuación es

$$z = 1$$

3-19. *Considerar la función* $f(x,y) = (xe^y)^3$.
(a) *Calcular el plano tangente a la gráfica de* f *en el punto* $(2,0)$.
(b) *Aproximar, utilizando el plano tangente a la gráfica de* f, *el valor de* $(1,999e^{0,002})^3$.

Solución:
(a) Nos piden el plano tangente a la gráfica de f en el punto $(2,0,f(2,0)) = (2,0,8)$. Consideramos la función de 3 variables

$$g(x,y,z) = x^3e^{3y} - z$$

La gráfica de f es la superficie de nivel de g,

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(x,y,z) = 0\}$$

Por tanto, nos piden calcular el plano tangente a la superficie de nivel A en el punto $(2,0,8)$. Como,

$$\nabla g(2,0,8) = \left.(3x^2e^y, 3x^3e^y, -1)\right|_{x=2,y=0,z=8} = (12,24,-1)$$

la ecuación del plano tangente es

$$(12,24,-1)\cdot(x-2,y,z-8) = 0$$

es decir

$$12x + 24y - z = 16$$

(b) Nos piden calcular la función $f(x,y) = x^3e^{3y}$ en el punto $(1'999, 0'002)$. Como f es diferenciable y este punto es muy cercano al punto $(2,0)$, utilizamos la aproximación del plano tangente

$$z = 12x + 24y - 16$$

con lo que obtenemos

$$f(1'999, 0'002) \approx \left.(12x + 24y - 16)\right|_{x=1'999,y=0'002} = 8'036$$

3-20. *Calcular el plano tangente y la recta normal a las superficies de nivel en los puntos que se indican a continuación.*
(a) $x^2 + 2xy + 2y^2 - z = 0$ *en el punto* $(1,1,5)$.
(b) $x^2 + y^2 - z = 0$ *en el punto* $(1,2,5)$.
(c) $(y - x^2)(y - 2x^2) - z = 0$ *en el punto* $(1,3,2)$.

Solución:
(a) Calculamos el gradiente

$$\left.\nabla(x^2 + 2xy + 2y^2 - z)\right|_{(x,y,z)=(1,1,5)} = \left.(2x + 2y, 2x + 4y, -1)\right|_{(x,y,z)=(1,1,5)} = (4,6,-1)$$

por lo que la ecuación del plano tangente es

$$(4,6,-1)\cdot(x-1,y-1,z-5) = 0$$

es decir,

$$4x + 6y - z = 5$$

(b) Calculamos el gradiente

$$\left.\nabla(x^2 + y^2 - z)\right|_{(x,y,z)=(1,2,5)} = \left.(2x, 2y, -1)\right|_{(x,y,z)=(1,2,5)} = (2,4,-1)$$

por lo que la ecuación del plano tangente es

$$(2,4,-1)\cdot(x-1,y-2,z-5) = 0$$

es decir,

$$2x + 4y - z = 5$$

(c) Calculamos el gradiente

$$\begin{aligned}\nabla((y-x^2)(y-2x^2)-z)\big|_{(x,y,z)=(1,3,2)} &= (-2x(y-2x^2)-4x(y-x^2), 2y-3x^2, -1)\big|_{(x,y,z)=(1,3,2)} \\ &= (-10, 3, -1)\end{aligned}$$

por lo que la ecuación del plano tangente es

$$(-10, 3, -1)\cdot(x-1, y-3, z-2) = 0$$

es decir,

$$10x - 3y + z = 3$$

3-21. *Sean $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dos funciones cuyas derivadas parciales son continuas en todo $\mathbb{R}^2$.*

(a) *Probar que si*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$$

para todos los puntos $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, entonces $f-g$ sólo depende de y.

(b) *Probar que si*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$$

para todos los puntos $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, entonces $f-g$ sólo depende de x.

(c) *Probar que si $\nabla(f-g)(x,y) = (0,0)$ para todos los puntos $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, entonces $f-g$ es constante en todo $\mathbb{R}^2$.*

(d) *Encontrar una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = yx^2 + x + 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2x + y, \quad f(0,0) = 1$$

¿Hay más funciones que verifiquen estas condiciones?

Solución: Las funciones f y g son de clase C^1.

(a) Fijamos dos puntos $(a,b), (x,b)\in\mathbb{R}^2$. Sea $h(x,y) = f(x,y) - g(x,y)$. Por el Teorema del Valor medio,

$$h(x,b) - h(a,b) = \nabla h(c)\cdot(x-a, 0)$$

para algún punto $c = (c_1, c_2) = t(x,b) + (1-t)(a,b) = (tx + (1-t)a, b)$ con $0 < t < 1$. Como

$$\frac{\partial h}{\partial x}(c) = 0,$$

tenemos que $h(x,b) - h(a,b) = 0$. Es decir, $h(x,b) = h(a,b)$ para todo $x\in\mathbb{R}$ y la función h no depende de y

(b) Análogo al caso anterior.

(c) Tenemos que en todos los puntos de $\mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial(f-g)}{\partial x} = \frac{\partial(f-g)}{\partial y} = 0$$

y por tanto $f-g$ no depende ni de x ni de y.

(d) Si sabemos que $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = yx^2 + x + 2y$, podemos integrar con respecto a y, es decir

$$f(x,y) = \int (yx^2 + x + 2y)dy = \frac{1}{2}y^2x^2 + xy + y^2 + C(x)$$

donde $C(x)$ es una función que depende sólo de x. La otra condición es que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^2x + y$; probamos con la función que hemos obtenido

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}y^2x^2 + xy + y^2 + C(x)\right) = y^2x + y + C'(x)$$

por tanto, $C'(x) = 0$, por lo que $C(x) = c$ una constante. Para encontrar c usamos la última condición que es $f(0,0) = 1$, por tanto

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{1}{2}y^2x^2 + xy + y^2 + c \\ f(0,0) &= c \text{ por un lado y, por otro, } f(0,0) = 1\text{, por tanto } c = 1\end{aligned}$$

La función $f(x,y) = \frac{1}{2}y^2x^2 + xy + y^2 + 1$ verifica las condiciones pedidas. Si hubiera otra función g de clase C^1 que verificara estas condiciones tendríamos que $\nabla(f-g)(x,y) = (0,0)$ en todos los puntos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Por el apartado (c) tenemos que hay una constante $A \in \mathbb{R}$ tal que

$$(f-g)(x,y) = A$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Pero, como $f(0,0) = 1 = g(0,0)$, tenemos que $A = 0$ y las dos funciones coinciden.