HOJA 2: Límites y continuidad de funciones de varias variables.

(1) Halla el dominio de las siguientes funciones:
(a) $f(x,y) = (x^2+y^2-1)^{1/2}$.
(b) $f(x,y) = \dfrac{1}{xy}$.
(c) $f(x,y) = e^x - e^y$.
(d) $f(x,y) = e^{xy}$.
(e) $f(x,y) = \ln(x+y)$.
(f) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$.
(g) $f(x,y,z) = \sqrt{\frac{x^2+1}{yz}}$.
(h) $f(x,y) = \sqrt{x-2y+1}$.

(2) Halla la imagen de las siguientes funciones:
(a) $f(x,y) = (x^2+y^2+1)^{1/2}$.
(b) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.
(c) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.
(d) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$.
(e) $f(x,y) = \ln(1+x^2+y^2)$.
(f) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

(3) Dibuja las curvas de nivel de las siguientes funciones para los valores de c propuestos:
(a) $f(x,y) = xy$, $c = 1, -1, 3$.
(b) $f(x,y) = e^{xy}$, $c = 1, -1, 3$.
(c) $f(x,y) = \ln(xy)$, $c = 1, -1, 3$.
(d) $f(x,y) = (x+y)/(x-y)$, $c = 0, 2, -2$.
(e) $f(x,y) = x^2 - y$, $c = 0, 1, -1$.
(f) $f(x,y) = ye^x$, $c = 0, 1, -1$.

(4) Sea $f(x,y) = Cx^{\alpha}y^{1-\alpha}$ (con $0 < \alpha < 1$ y $C > 0$) la función de Cobb-Douglas donde x e y representan las unidades de trabajo y capital respectivamente y f las unidades producidas.
(a) Halla, representa e interpreta distintas curvas de nivel de f.
(b) Demuestra que si se duplican las unidades de trabajo y las de capital, entonces se duplica el nivel de producción.

(5) Estudia la existencia y el valor de los siguientes límites.
(a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^2}$.
(b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$.
(c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^4+y^2}$.
(d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+2y^2}$.
(e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$.
(f) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$.
(g) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^2}$.

(6) Estudia la continuidad de las siguientes funciones:
(a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^3+y^3} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy+1}{y}x^2 & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$.

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 y}{x^6+y^3} & \text{si } y \neq -x^2 \\ 0 & \text{si } y = -x^2 \end{cases}$.

(d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

(7) Sea el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ y la función $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida mediante

$$f(x,y) = \left(\frac{x+1}{y+2}, \frac{y+1}{x+2} \right)$$

Comprueba que se verifican las hipótesis del Teorema de Brouwer Â¿Es posible determinar el (o los) punto(s) fijo(s)?

(8) Considera la función $f(x,y) = 3y - x^2$ definida en el conjunto $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq x < 1/2, y \geq 0\}$. Dibuja el conjunto D y las curvas de nivel de f. Alcanza f un máximo y un mínimo sobre D?

(9) Sean los conjuntos $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ y $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \leq x \leq 1, \ -1 \leq y \leq 1\}$ y sea la función

$$f(x,y) = \frac{(x+1)\left(y + \frac{1}{5}\right)}{y + \dfrac{1}{2}}$$

¿Qué se puede afirmar de los extremos absolutos de f sobre A y B?

(10) Sea el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq y \leq \ln x, 1 \leq x \leq 2\}$.
  (a) Dibujar el conjunto A, su frontera y su interior, y discute si A es un conjunto abierto, cerrado, acotado, compacto y/o convexo, razonando tus respuestas.
  (b) Demuestra que la función $f(x,y) = y^2 + (x-1)^2$ tiene un máximo y un mínimo en A.
  (c) Utilizando las curvas de nivel de $f(x,y)$, hallar el máximo y el mínimo de f en A.

(11) Sea el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0; \ln(xy) \geq 0\}$.
  (a) Dibujar el conjunto A, su frontera y su interior, y discute si A es un conjunto abierto, cerrado, acotado, compacto y/o convexo, razonando tus respuestas.
  (b) Considerar la función $f(x,y) = x + 2y$. Â¿Se puede utilizar el teorema de Weierstrass para determinar si esta función alcanza un máximo y/o un mínimo en el conjunto A? Dibujar las curvas de nivel de f, indicando la dirección de crecimiento de la función.
  (c) Utilizando las curvas de nivel de $f(x,y)$, determinar gráficamente (sin utilizar, por tanto, las condiciones de primer orden) los extremos absolutos de la función f en el conjunto A.