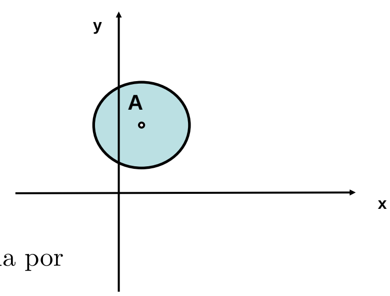
UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID
MATEMÁTICAS[1] PARA LA ECONOMÍA II
PROBLEMAS (SOLUCIONES)

HOJA 2: Límites y continuidad de funciones en $\mathbb{R}^n$.

2-1. *Dibuja cada uno de los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ siguientes. Dibuja su frontera y su interior. Estudia si son abiertos, cerrados, acotados, compactos o convexos.*
(a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \|(x, y) - (1, 3)\| < 2\}$.
(b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x^3\}$.
(c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |y| \leq 2\}$.
(d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\}$.
(e) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < x^2, y < 1/x, x > 0\}$.
(f) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \leq y + 1\}$.
(g) $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + y^2 \leq 1, x \leq 1\}$.

Solución:
(a) El conjunto representa al disco de centro $C = (1, 3)$ y radio 2, al que se le quitado el centro.



La función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \|(x, y) - (1, 3)\| = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 3)^2}$$

es continua y el conjunto A se puede escribir como

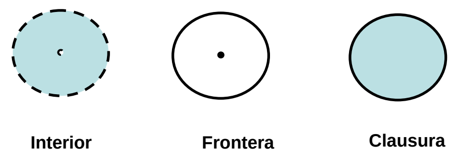
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < f(x, y) < 2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) \in (0, 2)\}$$

Como el intervalo $(0, 2) \subset \mathbb{R}$ es abierto, el conjunto A es **abierto**. Es **acotado**, ya que está contenido en el disco $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y) - (1, 3)\| < 2\}$.
Además, **no es convexo** ya que los puntos $P = (1, 4)$ y $Q = (1, 2)$ pertenecen a A pero la combinación convexa

$$\frac{1}{2}(1, 4) + \frac{1}{2}(1, 2) = (1, 3)$$

no pertenece al conjunto A.
El interior, la frontera y la clausura de A están representados en el gráfico siguiente

[1] Grados en Finanzas y Contabilidad, Empresa y Tecnología, Administración de Empresas y Derecho, Administración de Empresas y Estudios Internacionales y Administración de Empresas.



Observemos que $\partial A \cap A = \emptyset$. Esto proporciona otra forma de demostrar que el conjunto A es abierto.

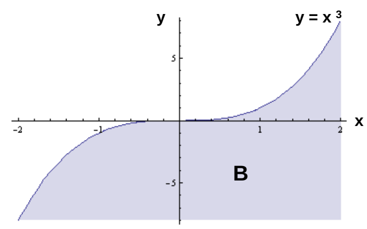
(b) La función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = x^3 - y$$

es continua y el conjunto B se puede escribir como

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) \geq 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) \in [0, \infty)\}$$

Como el intervalo $[0, \infty) \subset \mathbb{R}$ es cerrado, el conjunto B es **cerrado**.



El conjunto B **no es acotado** ya que, por ejemplo, los puntos

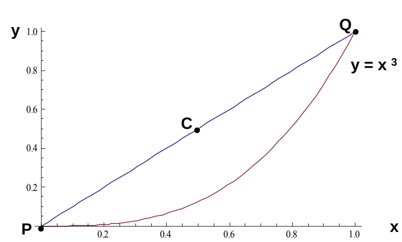
$$(1, 0), (2, 0), \ldots, (n, 0), \ldots$$

están en B pero

$$\lim_{n \to \infty} \|(n, 0)\| = +\infty$$

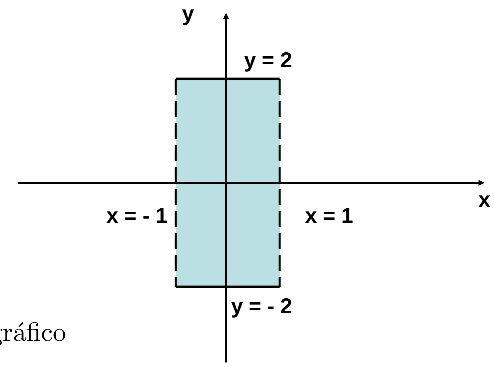
Además, **no es convexo** ya que los puntos $P = (0, 0)$ y $Q = (1, 1)$ pertenecen a B pero la combinación convexa

$$C = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

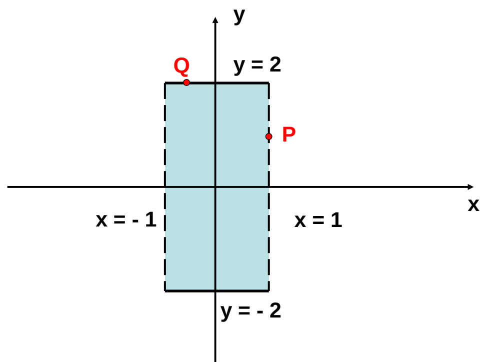


no pertenece al conjunto B, ya que no verifica la ecuación $y \leq x^3$.
El interior de B es el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < x^3\}$. La frontera de B es el conjunto $\partial(B) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^3\}$. Y La clausura de B es el conjunto $\bar{B} = B \cup \partial(B) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x^3\}$. Como $\bar{B} = B$, el conjunto **es cerrado**.

(c) La representación gráfica del conjunto C es



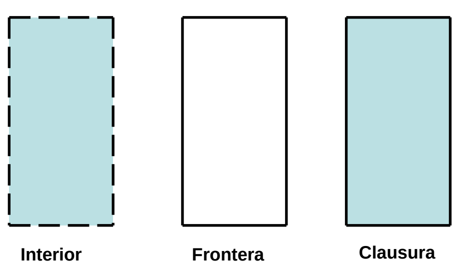
Los puntos P y Q del gráfico



están en la frontera de C. Como $P \notin C$, vemos que C **no es cerrado** y como $Q \in C$, vemos que C **no es abierto**.
Gráficamente, vemos que el conjunto C **es convexo**. Otra forma de demostrar esto es que el conjunto C está determinado por las desigualdades **lineales**

$$x > -1, \qquad x < 1, \qquad y \geq -2, \qquad y \leq 2$$

El interior, la frontera y la clausura de A están representados en el gráfico siguiente

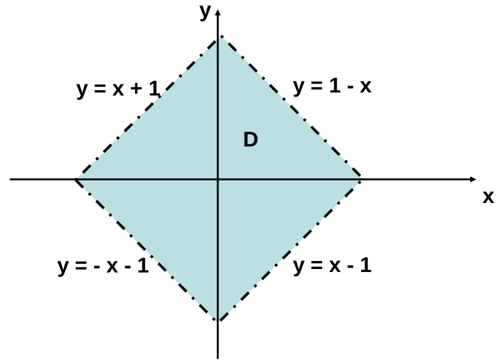


Vemos que $\partial(C) \cap C \neq \emptyset$, por lo que el conjunto **no es abierto**. Además, $C \neq \bar{C}$ por lo que el conjunto **no es cerrado**.

(d) Las funciones siguientes están definidas de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ y son continuas.

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= y - x - 1 \\ f_2(x,y) &= y - 1 + x \\ f_3(x,y) &= y + x + 1 \\ f_4(x,y) &= y - x + 1 \end{aligned}$$

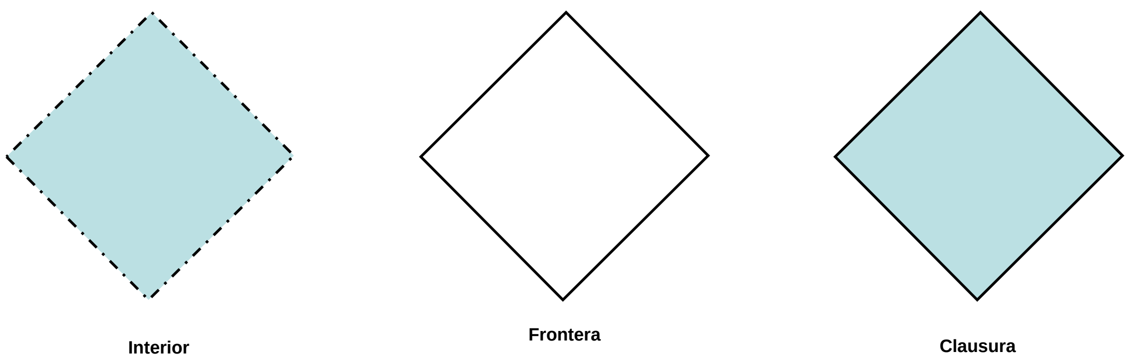
El conjunto D



está definido por

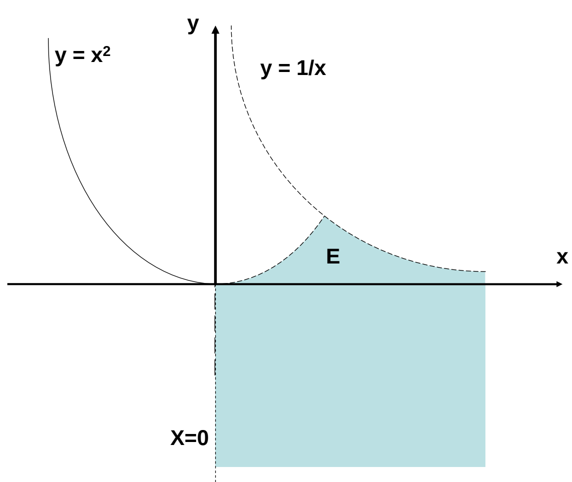
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f_1(x,y) < 0, \quad f_2(x,y) < 0, \quad f_3(x,y) > 0, \quad f_4(x,y) > 0\}$$

por lo que **es abierto y convexo**. El conjunto D **es acotado** porque está contenido en la bola de centro $(0,0)$ y radio 1.
El interior, la frontera y la clausura de A están representados en el gráfico siguiente



Como $\partial(D) \cap D = \emptyset$, el conjunto **es abierto**.

(e) La representación gráfica del conjunto E es



Las funciones

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= y - x^2 \\ f_2(x,y) &= y - 1/x \\ f_3(x,y) &= x \end{aligned}$$

están definidas de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ y son continuas. El conjunto E está definido por

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f_1(x,y) < 0, f_2(x,y) < 0, f_3(x,y) > 0\}$$

por lo que **es abierto**. El conjunto E **no es acotado** porque los puntos de la forma

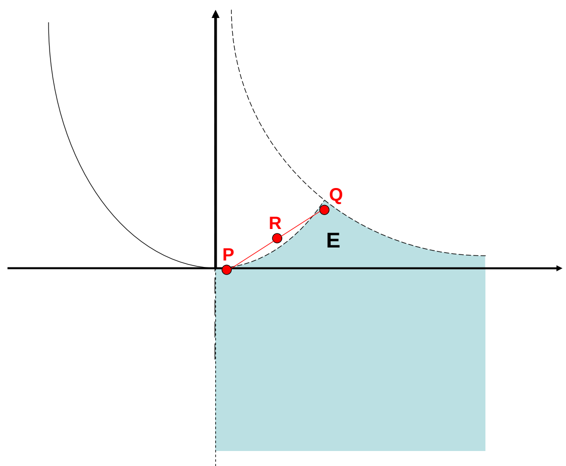
$$(n,0) \quad n = 1,2,\ldots$$

están en E y

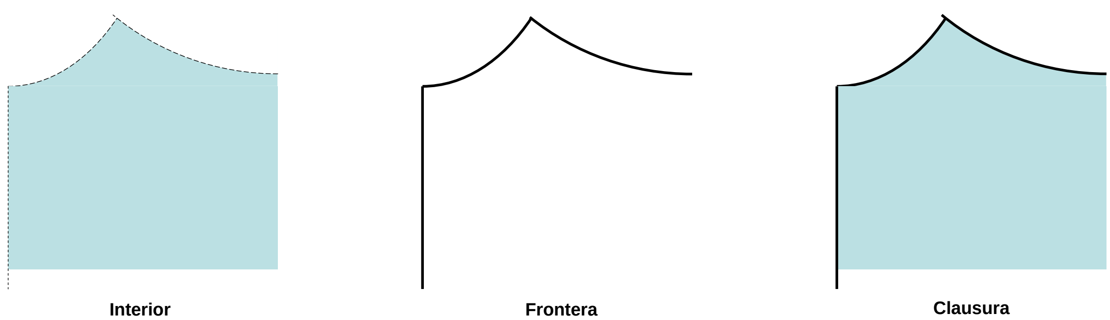
$$\lim_{n\to\infty} \| (n,0) \| = \lim_{n\to\infty} n = +\infty$$

Además, **no es convexo** ya que los puntos $P = (0'2, 0)$ y $Q = (1, 0'8)$ pertenecen a E pero la combinación convexa

$$R = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q = (0'6, 0'4)$$

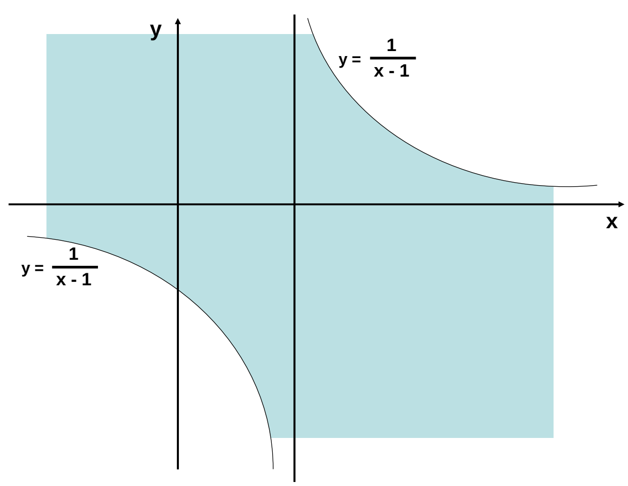


no pertenece a E porque no satisface la desigualdad $y < x^2$. El interior, la frontera y la clausura de E están representados en el gráfico siguiente



Como $\partial(E) \cap E = \emptyset$, el conjunto **es abierto**.

(f) La representación gráfica del conjunto F es



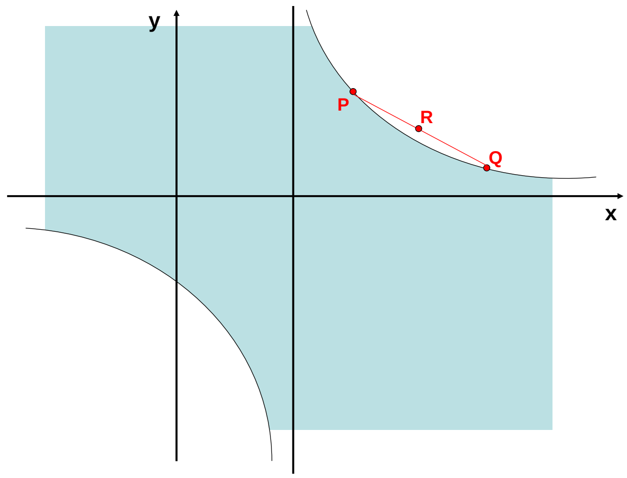
La función $f(x, y) = xy - y$ definida de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ es continua. El conjunto F es $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) \leq 1\}$ por lo que **es cerrado**. El conjunto F **no es acotado** porque los puntos de la forma

$$(n, 0) \quad n = 1, 2, \ldots$$

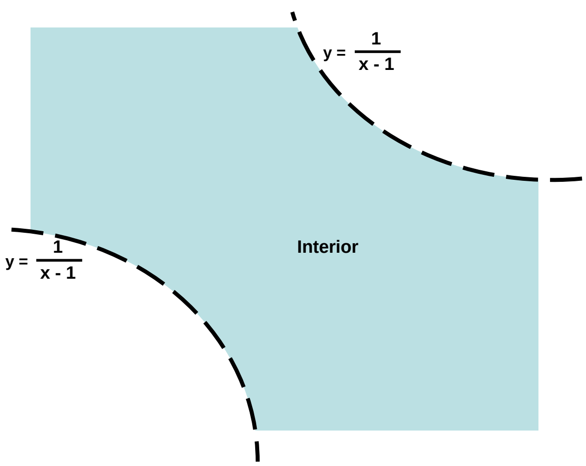
están en E y

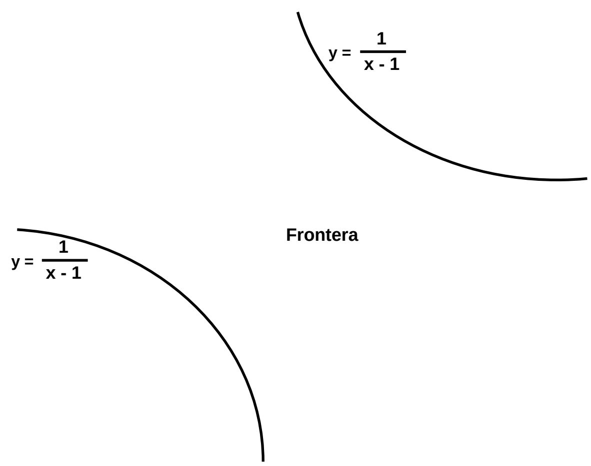
$$\lim_{n\to\infty} \| (n,0) \| = \lim_{n\to\infty} n = +\infty$$

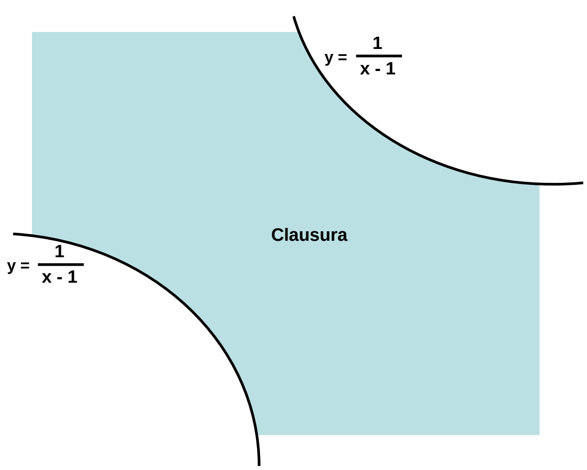
El diagrama



ilustra por qué F **no es convexo**. El interior, la frontera y la clausura de F están representados en el gráfico siguiente

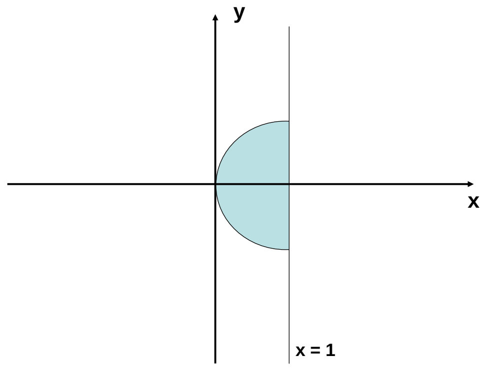




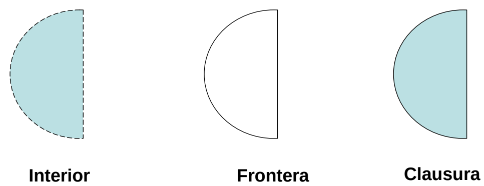


Como $\partial(F) \subset F$, el conjunto F **es cerrado**.

(g) La representación gráfica del conjunto G es



Las funciones $f(x,y) = (x-1)^2 + y^2$ y $g(x,y) = x$ definidas de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ son continuas. El conjunto G es $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \leq 1, \quad g(x,y) \leq 1\}$ por lo que **es cerrado**. El conjunto G **es acotado** porque coincide con el disco de centro $(1,0)$ y radio 1. Además, el conjunto G **es convexo**. El interior, la frontera y la clausura de G están representados en el gráfico siguiente



Como $\partial(G) \subset G$, el conjunto G es **cerrado**.

2-2. *Halle el dominio de las siguientes funciones:*

(a) $f(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)^{1/2}$.
(b) $f(x,y) = \dfrac{1}{xy}$.
(c) $f(x,y) = e^x - e^y$.
(d) $f(x,y) = e^{xy}$.
(e) $f(x,y) = \ln(x+y)$.
(f) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$.
(g) $f(x,y,z) = \sqrt{\frac{x^2+1}{yz}}$.
(h) $f(x,y) = \sqrt{x - 2y + 1}$.

Solución:

(a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}$.
(b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 0\}$. ($\mathbb{R}^2$ menos los ejes).
(c) $\mathbb{R}^2$.
(d) $\mathbb{R}^2$.
(e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y > 0\}$.
(f) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
(g) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : yz > 0\}$.
(h) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - 2y \geq -1\}$.

2-3. *Halla la imagen de las siguientes funciones:*

(a) $f(x,y) = (x^2 + y^2 + 1)^{1/2}$.
(b) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$.
(c) $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

(d) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$.
(e) $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$.
(f) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

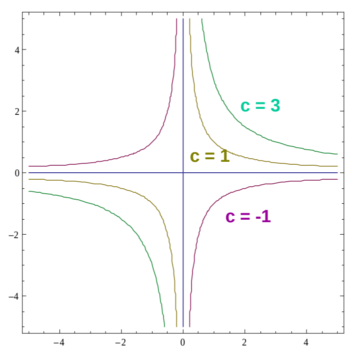
Solución:
(a) $[1, \infty)$.
(b) $\left[\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.
(c) $[-1, 1]$.
(d) $(-\infty, \infty)$.
(e) $[0, \infty)$.
(f) $[0, \infty)$.

2-4. *Dibuja las curvas de nivel de las siguientes funciones para los valores de c propuestos:*
(a) $f(x, y) = xy$, $c = 1, -1, 3$.
(b) $f(x, y) = e^{xy}$, $c = 1, -1, 3$.
(c) $f(x, y) = \ln(xy)$, $c = 1, -1, 3$.
(d) $f(x, y) = (x + y)/(x - y)$, $c = 0, 2, -2$.
(e) $f(x, y) = x^2 - y$, $c = 0, 1, -1$.
(f) $f(x, y) = ye^x$, $c = 0, 1, -1$.

Solución:
(a) Las curvas de nivel están determinadas por la ecuación $xy = c$. Para $c \neq 0$, las curvas de nivel vienen dadas por la gráfica de

$$y = \frac{c}{x}$$

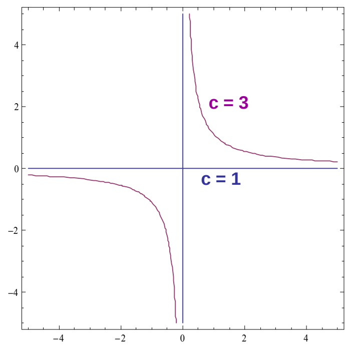
por lo que las curvas de nivel son



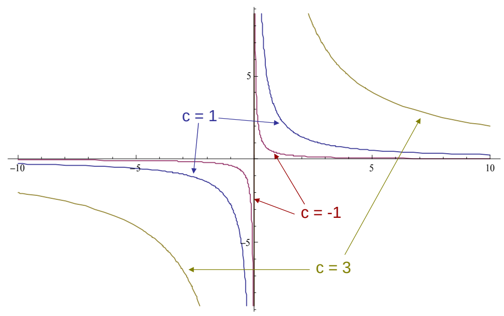
(b) Las curvas de nivel están determinadas por la ecuación $e^{xy} = c$. Por lo tanto cuando la curva de nivel correspondiente a $c \leq 0$ es el conjunto vacío. En particular, no hay curva de nivel correspondiente a $c = -1$.
Para $c > 0$, la curva de nivel verifica la ecuación $e^{xy} = c$, por lo que $xy = \ln c$. Para $c = 1$, la curva de nivel son los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $xy = 0$. Para $c = 3$, la curva de nivel son los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que

$$y = \frac{\ln 3}{x}$$

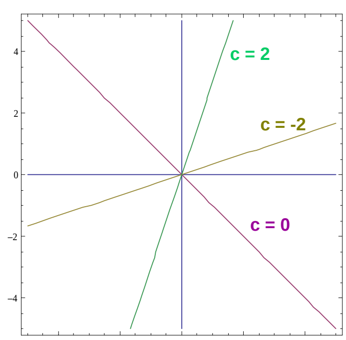
Gráficamente,



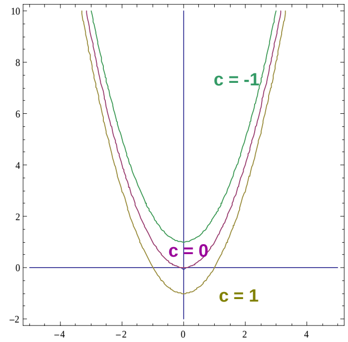
(c) Las curvas de nivel están determinadas por la ecuación $\log(xy) = c$ que es la misma que $xy = e^c$. Gráficamente,



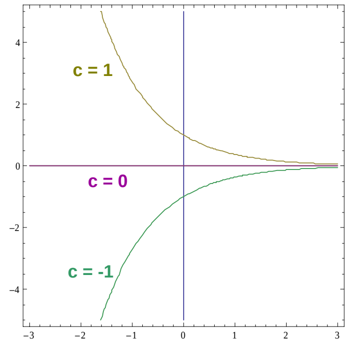
(d) Las curvas de nivel están determinadas por la ecuación $x + y = c(x - y)$, que es la misma que $(1 + c)y = (c - 1)x$. Gráficamente,



(e) Las curvas de nivel verifican la ecuación $y = x^2 - c$. Gráficamente,



(f) Las curvas de nivel verifican la ecuación $y = ce^{-x}$. Gráficamente,



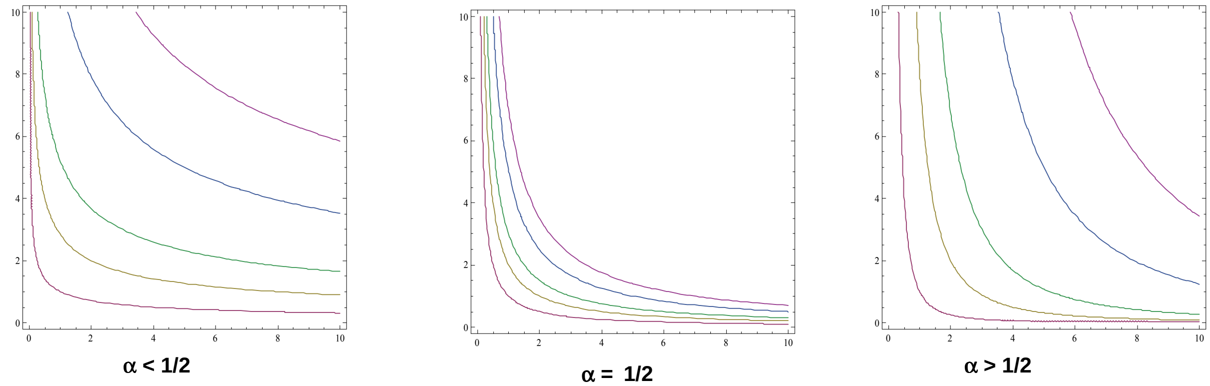
2-5. *Sea $f(x, y) = Cx^{\alpha}y^{1-\alpha}$ (con $0 < \alpha < 1$ y $C > 0$) la función de Cobb-Douglas donde x e y representan las unidades de trabajo y capital respectivamente y f las unidades producidas.*

(a) *Halla, representa e interpreta distintas curvas de nivel de f.*

(b) *Demuestra que si se duplican las unidades de trabajo y las de capital, entonces se duplica el nivel de producción.*

Solución:

(a) Las curvas de nivel son,



(b) $f(x, y) = Cx^{\alpha}y^{1-\alpha}$, $f(2x, 2y) = C\,(2x)^{\alpha}\,(2y)^{1-\alpha} = 2Cx^{\alpha}y^{1-\alpha} = 2f(x, y)$.

2-6. *Estudia la existencia y el valor de los siguientes límites.*

(a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x^2+y^2}$.

(b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$.

(c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^4+y^2}$.

(d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+2y^2}$.

(e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$.
(f) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$.
(g) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^2}$.

Solución:

(a) $\left[(\frac{x}{x^2+y^2})\right]_{y=x} = \frac{x}{x^2+x^2} = \frac{1}{2x}$ y $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2x}\right)$ no existe. El límite no existe.

(b) Vamos a probar que
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$
Observamos que
$$0 \leq |f(x,y)| = \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{|x|(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = |x|$$
Y como $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |x| = 0$. Tenemos que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

(c) Por una parte,
$$\left[(\frac{3x^2y}{x^4+y^2})\right]_{y=x} = \frac{3x^3}{x^4+x^2} = \frac{3x}{x^2+1}$$
y
$$\lim_{x\to 0} \frac{3x}{x^2+1} = 0$$
Por otro lado,
$$\left[(\frac{3x^2y}{x^4+y^2})\right]_{y=x^2} = \frac{3}{2}$$
Por tanto, el límite no existe.

(d) $\left[(\frac{x^2-y^2}{x^2+2y^2})\right]_{y=kx} = \frac{x^2-k^2x^2}{x^2+2k^2x^2} = \frac{1-k^2}{1+2k^2}$, depende de k. Por tanto, el límite no existe.

(e) $\left[(\frac{xy}{x^2+y^2})\right]_{y=kx} = x^2\frac{k}{x^2+k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2}$, depende de k.

(f) Vamos a probar que
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$
Observamos que
$$|f(x,y)| = \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{(x^2+y^2)|y|}{x^2+y^2} = |y|$$
Y como $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$, concluimos que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

(g) Vamos a probar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. Observamos que
$$|f(x,y)| = \left|\frac{xy^3}{x^2+y^2}\right| = \left|\frac{y^2}{x^2+y^2}xy\right| \leq \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}|xy| = |xy|$$
Y como $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |xy| = 0$, concluimos que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

2-7. *Estudia la continuidad de las siguientes funciones:*

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^3+y^3} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy+1}{y}x^2 & si\ y \neq 0 \\ 0 & si\ y = 0 \end{cases}$.

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4y}{x^6+y^3} & si\ y \neq -x^2 \\ 0 & si\ y = -x^2 \end{cases}$.

(d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Solución:

(a) La función $\frac{x^2y}{x^3+y^3}$ es discontinua en los puntos $\{(x,y) : x = -y\}$. (El límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^3+y^3}$$

no existe. Se puede hacer probando con curvas de la forma $y = kx$.)

(b) La función $\frac{xy+1}{y}x^2$,

(i) es continua en los puntos (x,y) para los que $y \neq 0$.

(ii) no es continua en los puntos de la forma $(x_0, 0)$ con $x_0 \neq 0$. Ya que el límite

$$\lim_{y\to 0}(f(x_0,y)) = \lim_{y\to 0} x_0^3 + \frac{x_0^2}{y}$$

no existe si $x_0 \neq 0$.

(iii) Tampoco es continua en $(0,0)$ porque

$$\lim_{x\to 0} f(x,kx^2) = \lim_{x\to 0}\left(x^3 + \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k}$$

que depende de k.

(c) La función

$$\frac{x^4y}{x^6+y^3}$$

es continua en los puntos (x,y) tales que $y \neq -x^2$. En cambio, en los puntos de la forma $(a, -a^2)$ no es continua porque,

(i) Si $a \neq 0$, tenemos que

$$\lim_{y\to -a^2} f(a,y)$$

no existe porque el numerador tiende a $-a^6 \neq 0$ y el denominador tiende a 0.

(ii) El límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

no existe porque

$$\lim_{t\to 0} f(t,t^2) = \lim_{t\to 0}\frac{t^6}{t^6+t^6} = \frac{1}{2}$$

mientras que los límites iterados valen 0.

(d) La función $\frac{xy^3}{x^2+y^2}$ es un cociente de polinomios y el denominador sólo se anula cuando $(x,y) = (0,0)$. Por tanto, la función es continua en todos los puntos $(x,y) \neq (0,0)$.
En el punto $(0,0)$ también es continua porque hemos probado en un problema anterior que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^2} = 0$$

Concluimos que la función es continua en todo $\mathbb{R}^2$.

2-8. *Sea el conjunto* $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ *y la función* $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *definida mediante*

$$f(x,y) = \left(\frac{x+1}{y+2}, \frac{y+1}{x+2}\right)$$

Comprueba que se verifican las hipótesis del Teorema de Brouwer ¿ Es posible determinar el (o los) punto(s) fijo(s)?

Solución: Teorema de Brouwer: Sea A un subconjunto compacto, convexo y no vacío de R^n y $f : A \to A$ una función continua. Entonces, f tiene un punto fijo. (Es decir, un punto $a \in A$, tal que $f(a) = a$). El conjunto A es compacto y convexo. La función f es continua si $y \neq -2$ y $x \neq -2$. Por tanto, f es continua en A y se verifica el Teorema de Brouwer.

Si (x,y) es un punto fijo de f, entonces

$$\begin{aligned} x &= \frac{x+1}{y+2} \\ y &= \frac{y+1}{x+2} \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} xy &= 1-x \\ xy &= 1-y \end{aligned}$$

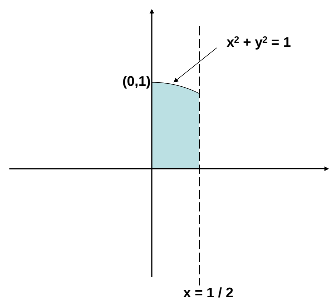
por tanto $x = y$ y se verifica la ecuación $x^2 + x - 1 = 0$ cuyas soluciones son

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

La única solución en el conjunto A es $(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2})$.

2-9. *Considera la función* $f(x,y) = 3y - x^2$ *definida en el conjunto* $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq x < 1/2, y \geq 0\}$. *Dibuja el conjunto* D *y las curvas de nivel de* f. *Alcanza* f *un máximo y un mínimo sobre* D?

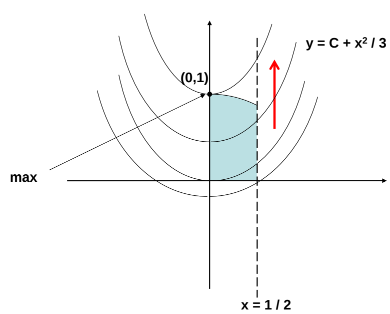
Solución: El conjunto D es



Observemos que D no es compacto (ya que no es cerrado). No contiene al punto $(1/2, 0)$. Por otro lado, las curvas de nivel de f son de la forma

$$y = C + \frac{x^2}{3}$$

Gráficamente, (la flecha roja apunta en la dirección de crecimiento)



Vemos que f alcanza un máximo en el punto $(0,1)$, pero no alcanza ningún mínimo sobre A.

2-10. *Sean los conjuntos* $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ *y* $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1\}$ *y sea la función*

$$f(x,y) = \frac{(x+1)\left(y+\frac{1}{5}\right)}{y + \dfrac{1}{2}}$$

¿Qué se puede afirmar de los extremos absolutos de f *sobre* A *y* B?

Solución: La función

$$f(x,y) = \frac{(x+1)\left(y+\frac{1}{5}\right)}{y+\frac{1}{2}}$$

es continua si $y \neq -1/2$ y, en particular, es continua en el conjunto A, que es compacto. Por el Teorema de Weierstrass, f alcanza un máximo y un mínimo en A.

Pero, por ejemplo, el punto $(0, -1/2) \in \text{Int}B$ y

$$\lim_{y \to \left(\frac{-1}{2}\right)^+} f(0,y) = -\infty, \qquad \lim_{y \to \left(\frac{-1}{2}\right)^-} f(0,y) = +\infty$$

por lo que f no alcanza ni máximo ni mínimo en B.

2-11. *Sea el conjunto* $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq y \leq \ln x, 1 \leq x \leq 2\}$.

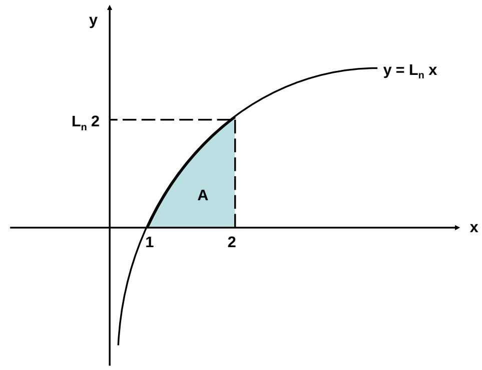
(a) *Dibujar el conjunto A, su frontera y su interior, y discute si A es un conjunto abierto, cerrado, acotado, compacto y/o convexo, razonando tus respuestas.*

(b) *Demuestra que la función $f(x, y) = y^2 + (x-1)^2$ tiene un máximo y un mínimo en A.*

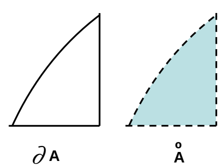
(c) *Utilizando las curvas de nivel de $f(x, y)$, hallar el máximo y el mínimo de f en A.*

Solución:

(a) El conjunto A es



La frontera e interior son



Como $\partial A \subset A$, el conjunto A es cerrado. No es abierto porque $\partial A \cap A \neq \emptyset$. Otra manera de probar esto sería considerar los conjuntos cerrados $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq y\}$, $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \leq x \leq 2\}$. El conjunto $A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \leq \log(x)\}$ es también cerrado al ser continua la función $g(x, y) = log(x) - y$. Entonces $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3$ es un conjunto cerrado.

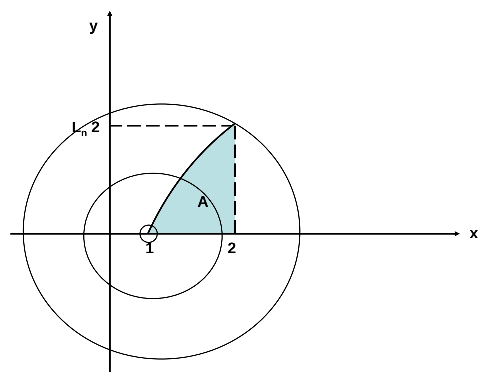
El conjunto A es acotado porque $A \subseteq B(0, r)$ con $r > 0$ suficientemente grande. Como es cerrado y acotado el conjunto A es compacto. El conjunto A es convexo porque es el hipógrafo de la función $f(x) = \ln x$ en el intervalo $[1, 2]$ y la función $\ln x$ es cóncava.

(b) La función f es continua en todo $\mathbb{R}^2$, porque es un polinomio. En particular, la función es continua en el conjunto A. Además, el conjunto A es compacto ya que es una circunferencia. Por el teorema de Weierstrass, la función alcanza un máximo y un mínimo.

(c) Las curvas de nivel de f tienen por ecuación

$$f(x, y) = y^2 + (x-1)^2 = C.$$

Son círculos centrados en el punto $(1, 0)$.



Gráficamente, vemos que el máximo es $f(2, \ln 2) = 1 + (\ln 2)^2$ y se alcanza en el punto $(2, \ln 2)$ y que el mínimo es $f(1, 0) = 0$ y se alcanza en el punto en el punto $(1, 0)$.

2-12. *Sea el conjunto* $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0; \ln(xy) \geq 0\}$.

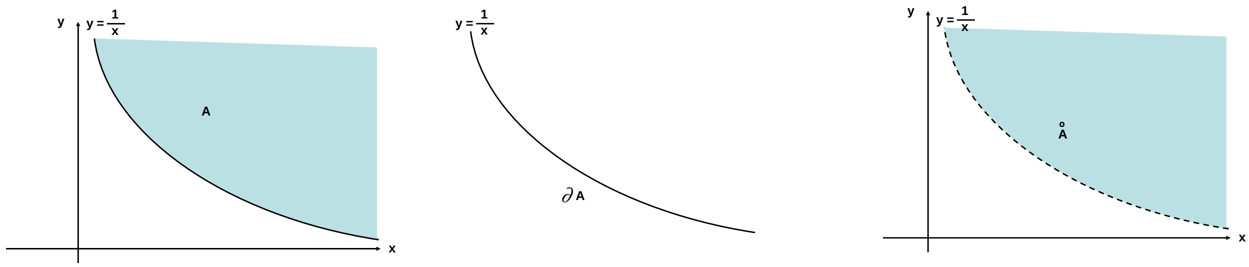
(a) *Dibujar el conjunto A, su frontera y su interior, y discute si A es un conjunto abierto, cerrado, acotado, compacto y/o convexo, razonando tus respuestas.*

(b) *Considerar la función $f(x,y) = x + 2y$. ¿ Se puede utilizar el teorema de Weierstrass para determinar si esta función alcanza un máximo y/o un mínimo en el conjunto A? Dibujar las curvas de nivel de f, indicando la dirección de crecimiento de la función.*

(c) *Utilizando las curvas de nivel de $f(x,y)$, determinar gráficamente (sin utilizar, por tanto, las condiciones de primer orden) los extremos absolutos de la función f en el conjunto A.*

Solución:

(a) La ecuación $\ln(xy) \geq 0$ es equivalente a $xy \geq 1$. Como $x, y > 0$, el conjunto es $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 1/x, \quad x > 0\}$. Gráficamente,



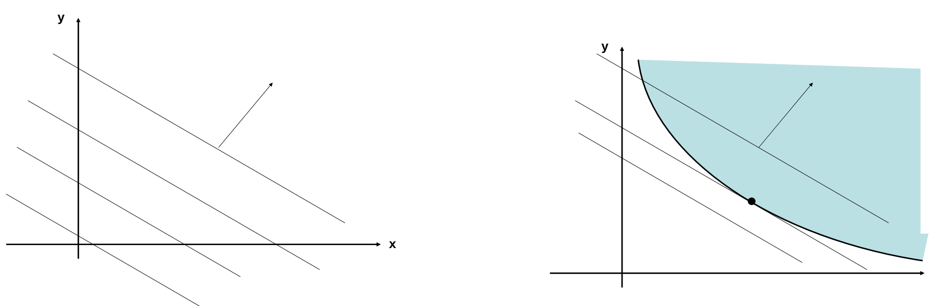
La frontera es el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1/x, \quad x > 0\}$. El interior es el conjunto $\mathring{A} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 1/x, \quad x > 0\}$.

Como $\partial A \cap A \neq \emptyset$, el conjunto A no es abierto. Además $\partial A \subset A$ por lo que el conjunto A es cerrado. Gráficamente, vemos que A no es acotado. El conjunto A no es compacto (ya que no está acotado). Podemos probar que el conjunto A es convexo de dos maneras.

(i) Consideramos la función $g(x) = \frac{1}{x}$. Es fácil comprobrar que esta función es convexa. Por lo tanto el conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \in \mathbb{R} : x > 0, y \geq \frac{1}{x}\}$ es también convexo.

(ii) Consideremos ahora la función $g(x,y) = \ln(xy) = \ln x + \ln y$, definida en el conjunto convexo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}$. El Hessiano de esta función es $\mathrm{H}\, g = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$, que es definido negativo. De aquí deducimos que la función g es cóncava en D. Como $A = \{(x,y) \in D : g(x,y) \geq 0\}$, el conjunto A es convexo.

(b) No se puede aplicar el Teorema de Weierstrass porque el conjunto A no es compacto. Las curvas de nivel de $f(x,y) = x + 2y$ son los conjuntos de la forma $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = C - x/2\}$ que son líneas rectas. Gráficamente (el vector indica la dirección de crecimiento)



(c) Teniendo en cuenta las curvas de nivel de f, la función no alcanza ningún máximo (absoluto o relativo) en A . El mínimo absoluto se alcanza en el punto de tangencia de la recta $y = C - x/2$ con la gráfica de $y = 1/x$,

En este punto se verifica que

$$-\frac{1}{2} = -\frac{1}{x^2}$$

es decir $x = \pm\sqrt{2}$. Y como $x > 0$, el mínimo se alcanza el el punto $\left(\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right)$,