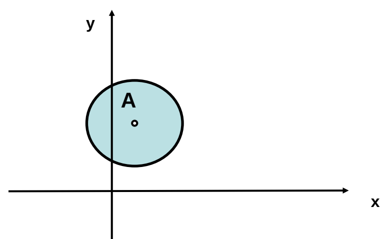
UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID
MATEMÁTICAS PARA LA ECONOMÍA I — CURSO 2021–2022
PROBLEMAS (SOLUCIONES)

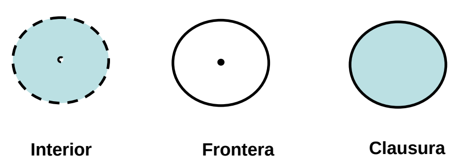
HOJA 1: El Espacio Euclidiano $\mathbb{R}^n$.

(1) *Dibuja cada uno de los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ siguientes. Dibuja su frontera y su interior. Estudia si son abiertos, cerrados, acotados o convexos.*
(a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \|(x, y) - (1, 3)\| < 2\}$.
(b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x^3\}$.
(c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |y| \leq 2\}$.
(d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\}$.
(e) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < x^2, y < 1/x, x > 0\}$.
(f) $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \leq y + 1\}$.
(g) $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + y^2 \leq 1, x \leq 1\}$.

Solución:
(a) El conjunto representa al disco de centro $C = (1, 3)$ y radio 2, al que se le quitado el centro.

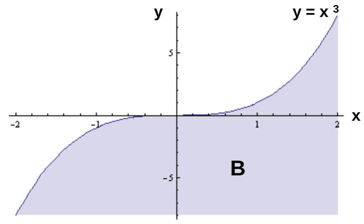


La función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x, y) = \|(x, y) - (1, 3)\| = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 3)^2}$$
es continua y el conjunto A se puede escribir como
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < f(x, y) < 2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) \in (0, 2)\}$$
Como el intervalo $(0, 2) \subset \mathbb{R}$ es abierto, el conjunto A es **abierto**. Es **acotado**, ya que está contenido en el disco $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y) - (1, 3)\| < 2\}$.
Además, **no es convexo** ya que los puntos $P = (1, 4)$ y $Q = (1, 2)$ pertenecen a A pero la combinación convexa
$$\frac{1}{2}(1, 4) + \frac{1}{2}(1, 2) = (1, 3)$$
no pertenece al conjunto A.
El interior, la frontera y la clausura de A están representados en el gráfico siguiente



Observemos que $\partial A \cap A = \emptyset$. Esto proporciona otra forma de demostrar que el conjunto A es abierto.

(b) La función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x, y) = x^3 - y$$
es continua y el conjunto B se puede escribir como
$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) \geq 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) \in [0, \infty)\}$$
Como el intervalo $[0, \infty) \subset \mathbb{R}$ es cerrado, el conjunto B es **cerrado**.



El conjunto B **no es acotado** ya que, por ejemplo, los puntos

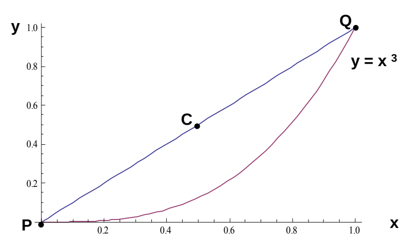
$$(1,0),(2,0),\ldots,(n,0),\ldots$$

están en B pero

$$\lim_{n\to\infty}\|(n,0)\| = +\infty$$

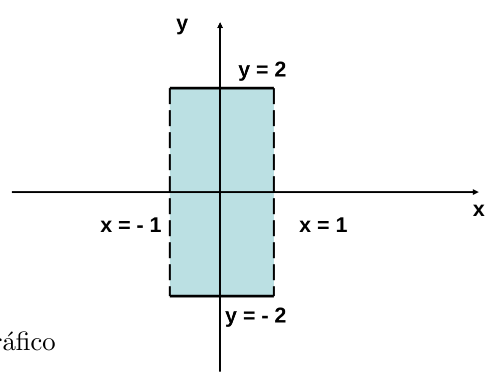
Además, **no es convexo** ya que los puntos $P=(0,0)$ y $Q=(1,1)$ pertenecen a B pero la combinación convexa

$$C = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q = \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

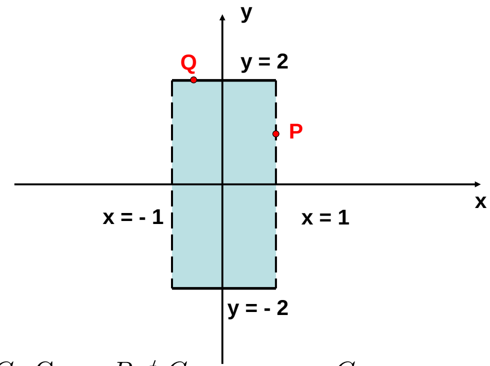


no pertenece al conjunto B, ya que no verifica la ecuación $y \le x^3$.
El interior de B es el conjunto $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y < x^3\}$. La frontera de B es el conjunto $\partial(B)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y = x^3\}$. Y La clausura de B es el conjunto $\bar{B} = B\cup\partial(B) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\le x^3\}$. Como $\bar{B}=B$, el conjunto **es cerrado**.

(c) La representación gráfica del conjunto C es



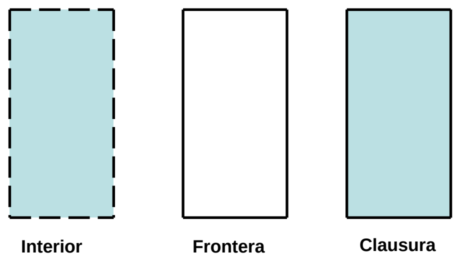
Los puntos P y Q del gráfico



están en la frontera de C. Como $P \notin C$, vemos que C **no es cerrado** y como $Q \in C$, vemos que C **no es abierto**.
Gráficamente, vemos que el conjunto C **es convexo**. Otra forma de demostrar esto es que el conjunto C está determinado por las desigualdades **lineales**

$$x > -1, \qquad x < 1, \qquad y \geq -2, \qquad y \leq 2$$

El interior, la frontera y la clausura de A están representados en el gráfico siguiente

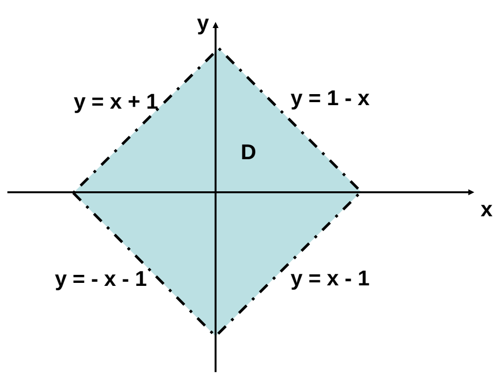


Vemos que $\partial(C) \cap C \neq \emptyset$, por lo que el conjunto **no es abierto**. Además, $C \neq \bar{C}$ por lo que el conjunto **no es cerrado**.

(d) Las funciones siguientes están definidas de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ y son continuas.

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= y - x - 1 \\ f_2(x,y) &= y - 1 + x \\ f_3(x,y) &= y + x + 1 \\ f_4(x,y) &= y - x + 1 \end{aligned}$$

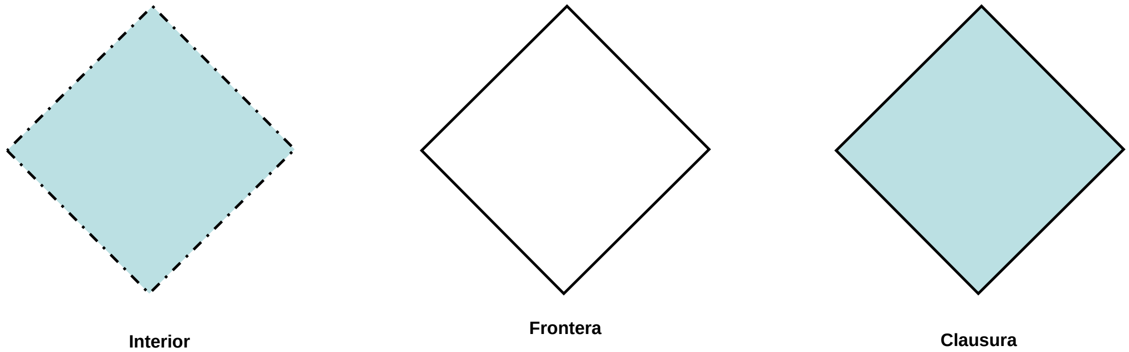
El conjunto D



está definido por

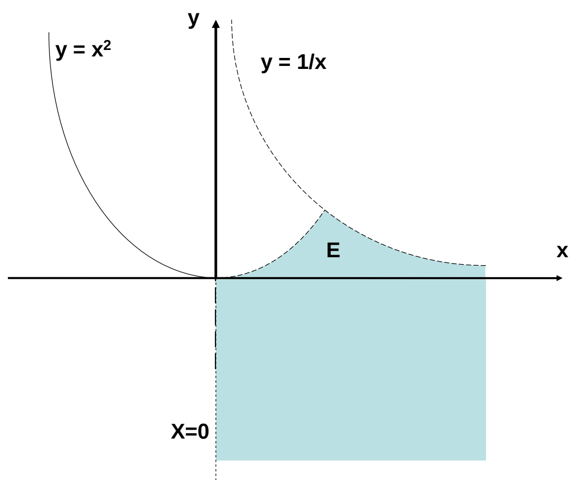
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f_1(x,y) < 0, \quad f_2(x,y) < 0, \quad f_3(x,y) > 0, \quad f_4(x,y) > 0\}$$

por lo que **es abierto y convexo**. El conjunto D **es acotado** porque está contenido en la bola de centro $(0,0)$ y radio 1.
El interior, la frontera y la clausura de A están representados en el gráfico siguiente



Como $\partial(D) \cap D = \emptyset$, el conjunto **es abierto**.

(e) La representación gráfica del conjunto E es



Las funciones

$$\begin{aligned} f_1(x,y) &= y - x^2 \\ f_2(x,y) &= y - 1/x \\ f_3(x,y) &= x \end{aligned}$$

están definidas de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ y son continuas. El conjunto E está definido por

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f_1(x,y) < 0, f_2(x,y) < 0, f_3(x,y) > 0\}$$

por lo que **es abierto**. El conjunto E **no es acotado** porque los puntos de la forma

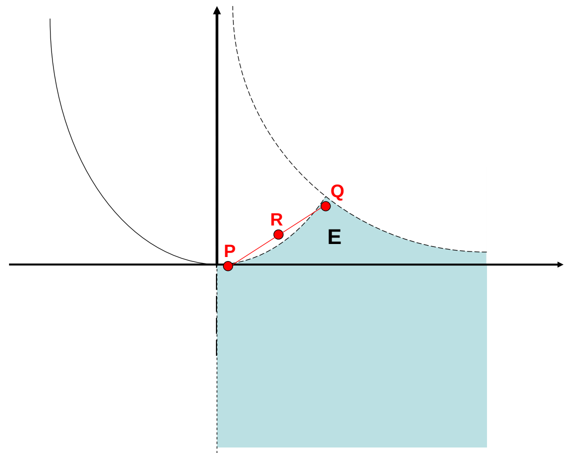
$$(n,0) \quad n = 1,2,\ldots$$

están en E y

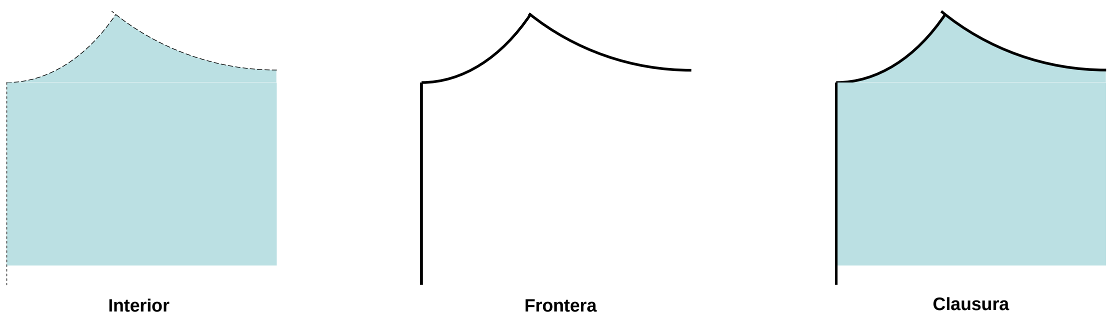
$$\lim_{n\to\infty} \| (n,0) \| = \lim_{n\to\infty} n = +\infty$$

Además, **no es convexo** ya que los puntos $P = (0'2, 0)$ y $Q = (1, 0'8)$ pertenecen a E pero la combinación convexa

$$R = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q = (0'6, 0'4)$$

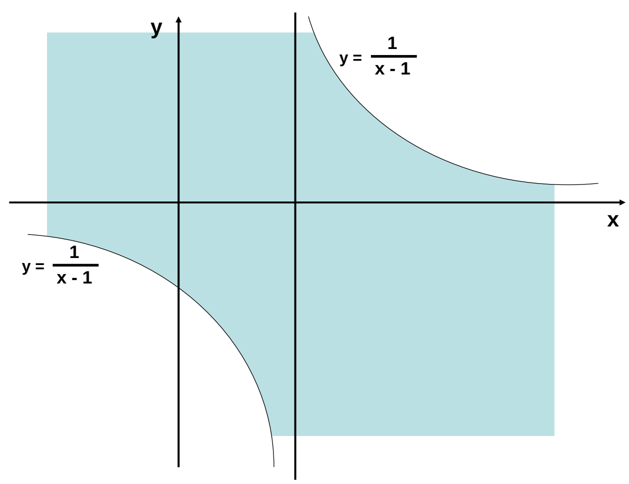


no pertenece a E porque no satisface la desigualdad $y < x^2$. El interior, la frontera y la clausura de E están representados en el gráfico siguiente



Como $\partial(E) \cap E = \emptyset$, el conjunto **es abierto**.

(f) La representación gráfica del conjunto F es



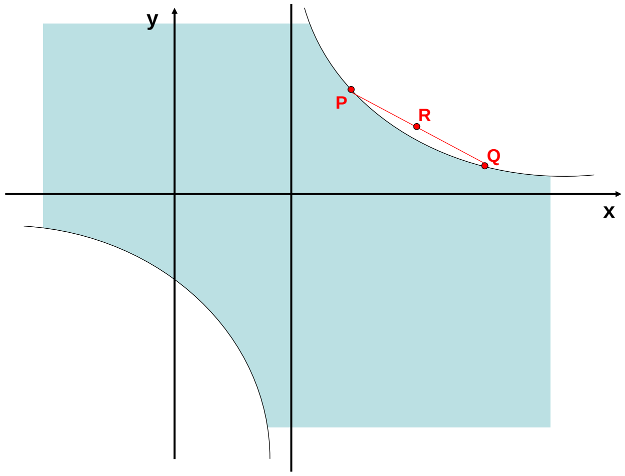
La función $f(x,y) = xy - y$ definida de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ es continua. El conjunto F es $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \leq 1\}$ por lo que **es cerrado**. El conjunto F **no es acotado** porque los puntos de la forma

$$(n, 0) \quad n = 1, 2, \ldots$$

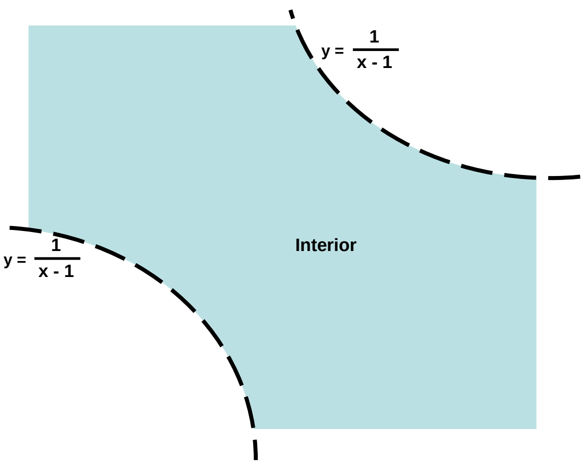
están en E y

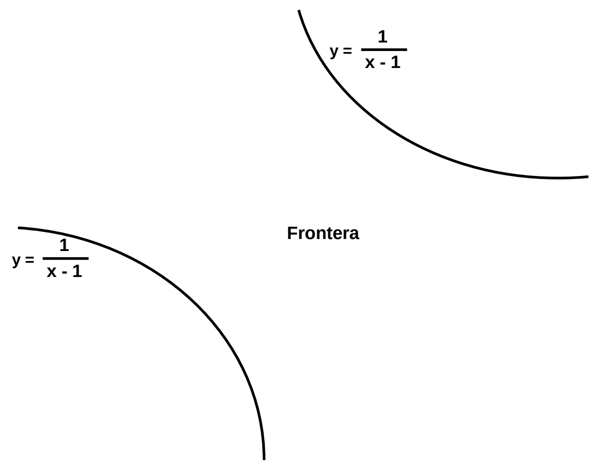
$$\lim_{n\to\infty} \| (n,0) \| = \lim_{n\to\infty} n = +\infty$$

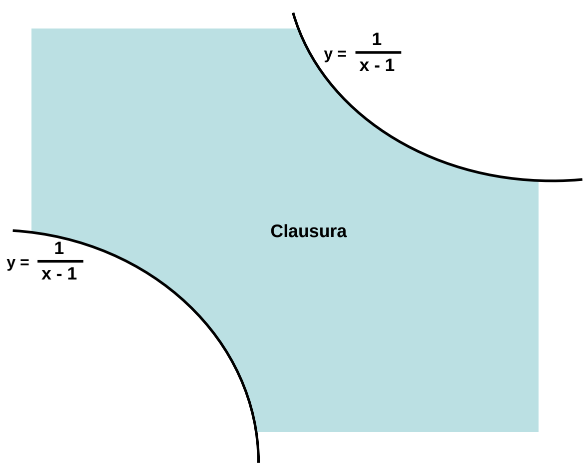
El diagrama



ilustra por qué F **no es convexo**. El interior, la frontera y la clausura de F están representados en el gráfico siguiente

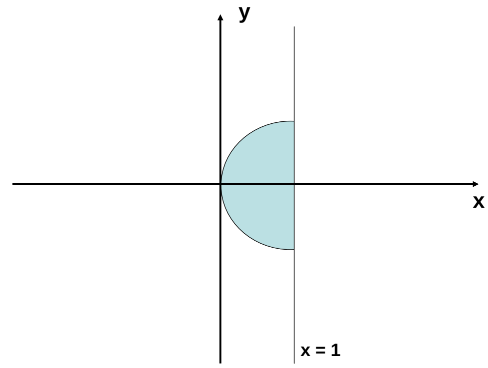




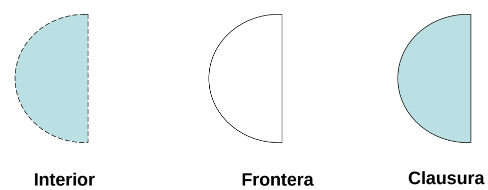


Como $\partial(F) \subset F$, el conjunto F **es cerrado**.

(g) La representación gráfica del conjunto G es



Las funciones $f(x,y) = (x-1)^2 + y^2$ y $g(x,y) = x$ definidas de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ son continuas. El conjunto G es $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \leq 1, \quad g(x,y) \leq 1\}$ por lo que **es cerrado**. El conjunto G **es acotado** porque coincide con el disco de centro $(1,0)$ y radio 1. Además, el conjunto G **es convexo**. El interior, la frontera y la clausura de G están representados en el gráfico siguiente



Como $\partial(G) \subset G$, el conjunto G es **cerrado**.

(2) *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Discute la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.*
 (a) $\mathit{Int}(A) = A - \mathit{Fr}(A)$.
 (b) $\mathit{Fr}(A) = \mathit{Fr}(\mathbb{R}^2 - A) = \mathit{Fr}(A^C)$.
 (c) $\mathit{Fr}(A)$ *está acotada.*
 (d) A *es cerrado* $\Longleftrightarrow$ A^C *es abierto.*
 (e) A *es acotado* $\Longleftrightarrow$ A^C *no es acotado.*
 (f) A *es cerrado* $\Longleftrightarrow$ $\mathit{Fr}(A) \subset A$.
 (g) A *es abierto* $\Longleftrightarrow$ $\mathit{Fr}(A) \cap A = \emptyset$.

Solución:
 (a) Si, porque: $x \in \mathrm{Int}(A) \Longleftrightarrow \exists\, \varepsilon > 0 : B(x,\varepsilon) \subset A \Longleftrightarrow \exists\, \varepsilon > 0 : B(x,\varepsilon) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) = \emptyset \Longleftrightarrow x \in A$ y $x \notin \mathrm{Fr}(A)$.
 (b) Si, porque: $\mathrm{Fr}(\mathbb{R}^n \setminus A) = \overline{\mathbb{R}^n \setminus A} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus (\mathbb{R}^n \setminus A)} = \overline{\mathbb{R}^n \setminus A} \cap \overline{A} = \mathrm{Fr}(A)$.
 (c) No. Ejemplo: $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$.
 (d) Si. Por definición.
 (e) No. Ejemplo: $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$.
 (f) Si, porque: A es cerrado $\Longleftrightarrow \mathbb{R}^n \setminus A$ es abierto $\Longleftrightarrow \mathbb{R}^n \setminus A = \mathrm{Int}(\mathbb{R}^n \setminus A)$. Pero, por (a) y (c), $\mathrm{Int}(\mathbb{R}^n \setminus A) = (\mathbb{R}^n \setminus A) \setminus \mathrm{Fr}(\mathbb{R}^n \setminus A) = (\mathbb{R}^n \setminus A) \setminus \mathrm{Fr}(A)$. Por lo que A es cerrado $\Longleftrightarrow \mathbb{R}^n \setminus A = (\mathbb{R}^n \setminus A) \setminus \mathrm{Fr}(A) \Longleftrightarrow \mathrm{Fr}(A) \subset A$.
 (g) Si, porque: A es abierto $\Longleftrightarrow A = \mathrm{Int}(A) \Longleftrightarrow A = A \setminus \mathrm{Fr}(A) \Longleftrightarrow A \cap \mathrm{Fr}(A) = \emptyset$.