Sesión 7
Matemáticas para la Economía I

Capítulo 3: Derivadas Parciales y Diferenciación. Parte II

Grados en Economía, Estudios Internacionales–Economía y Derecho–Economía

Universidad Carlos III de Madrid

Derivadas direccionales.

- $D_v f(p) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p+tv)-f(p)}{t}$ es la <u>derivada</u> de f en p <u>a lo largo (del vector)</u> v.
- If $\|v\| = 1$, entonces $D_v f(p)$ es la <u>derivada direccional</u> de f en p <u>en la dirección (del vector)</u> v.
- $f(x, y) = xy$, $p = (1, -1)$, $v = (3, 4)$. Entonces, $p + tv = (1 + 3t, -1 + 4t)$ y

$$
\begin{aligned}
D_v f(p) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(1+3t, -1+4t) - f(1, -1)}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{(1+3t)(-1+4t)+1}{t} = 1
\end{aligned}
$$

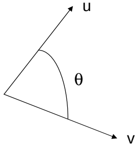
- Y, dado que $\|v\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, la derivada direccional de f en p en la dirección de v es $\frac{1}{\|v\|} D_v f(p) = \frac{1}{5}$.

Derivadas direccionales y gradiente.

- Si $f : D \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $p \in D$, entonces $D_v f(p) = \nabla f(p) \cdot v$.
- Sea $f(x, y) = xy$, $p = (1, -1)$, $v = (3, 4)$. Entonces,
  $\nabla f(p) = (y, x)\Big|_{\substack{x=1 \\ y=-1}} = (-1, 1)$ y
  $D_v f(p) = \nabla f(p) \cdot v = (-1, 1) \cdot (3, 4) = -3 + 4 = 1.$

Interpretación del gradiente.

- $D_v f(p) = \nabla f(p) \cdot v = \|\nabla f(p)\| \, \|v\| \cos\theta$, donde



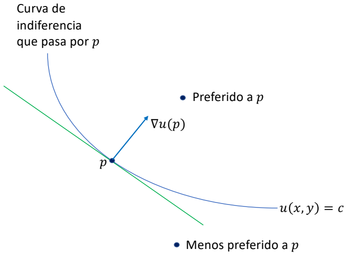
- Así pues, $D_v f(p)$
  - alcanza un máximo cuando $\theta = 0$, esto es, cuando los vectores $\nabla f(p)$ y v tienen la misma dirección.
  - alcanza un mínimo cuando $\theta = \pi$, esto es, cuando los vectores $\nabla f(p)$ y v son paralelos y opuestos.
  - es cero cuando $\theta = \pi/2$ o $\theta = 3\pi/2$, es decir, cuando los vectores $\nabla f(p)$ y v son perpendiculares.

Interpretación del gradiente.

- La función f crece más rápidamente en la dirección de $\nabla f(p)$.
- La función f decrece más rápidamente en la dirección opuesta a $\nabla f(p)$.
- La función f permanece constante si nos movemos en una curva que permanece perpendicular a $\nabla f(p)$. Si $c = f(p)$, entonces $\nabla f(p)$ es perpendicular a la curva/superficie de nivel dada por $f(x) = c$.

Example.

- Considere un con función de utilidad u. Entonces,
  1. El gradiente $\nabla u(p)$ apunta hacia las cestas que son preferidas a p.
  2. El gradiente $\nabla u(p)$ es perpendicular a la recta tangente a la curva de indiferencia que pasa por p.



Example.

- Considere la función $f(x, y, z) = 8x^2 + 4xz + 8x + y^4 + 32y + z^2 + 16$ definida en $\mathbb{R}^3$.
- Calculamos $D_v f(-1, 0, 1)$ for v=(2, 1, -1).
- Tenemos que

$$\nabla f(x, y, z) = \left(16x + 4z + 8, 4y^3 + 32, 4x + 2z\right)$$

- Puesto que, $\nabla f(-1, 0, 1) = (-4, 32, -2)$,
- obtenemos $D_v f(-1, 0, 1) = (-4, 32, -2) \cdot (2, 1, -1) = 26.$

Example.

- Considere la función $f(x, y, z) = ye^{xz} - x^2 - yz^2$, definida en $\mathbb{R}^3$.
- Calculamos el gradiente de f en el punto $p = (0, 1, 1)$ y vamos a ver para qué valores de a, b, c se verifica que $D_v f(p) = 0$.
- Tenemos que

$$\nabla f(x, y, z) = (yze^{xz} - 2x, e^{xz} - z^2, xye^{xz} - 2yz)$$

- por lo tanto,

$$\nabla f(0, 1, 1) = (1, 0, -2)$$

- Se deduce que

$$D_v f(p) = \nabla(p) \cdot v = (1, 0, -2) \cdot (a, b, c) = a - 2c$$

- y $D_v f(p) = 0$ si y sólo si $a = 2c$ con $b, c \in \mathbb{R}$ arbitrarios.

Ejemplo.

- Considere la función $f(x, y) = x^2 + y^2$, definida en $\mathbb{R}^2$ y la curva de nivel S dada por $x^2 + y^2 = 5$. Calculemos la recta tangente en el punto $p = (1, 2) \in S$.
- $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$, $\nabla f(x, y) = (2, 4)$
- La ecuación de la recta tangente a la curva $x^2 + y^2 = 5$ en el punto $p = (1, 2) \in S$ viene dada por

$$(2, 4) \cdot (x - 2, y - 4) = 0$$