Sesión 6
Matemáticas para la Economía I

Capítulo 3: Derivadas Parciales y Diferenciación. Parte I

Grados en Economía, Estudios Internacionales–Economía y Derecho–Economía

Universidad Carlos III de Madrid

Derivadas Parciales.

- En este capítulo, D denotará un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y sea $p \in D$.
- Las derivadas parciales de $f : D \to \mathbb{R}$ con respecto a la i-ésima variable en el punto p son el límite (si existe)

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p + te_i) - f(p)}{t} = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(p + te_i)$$

donde $e_i = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{i-1 \text{ términos}}, i, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-i \text{ términos}})$.

- En $\mathbb{R}^2$, $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$.
- En $\mathbb{R}^3$, $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.

Derivadas Parciales.

- Para $n = 2,\ p = (x, y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(x + t, y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(x, y + t)$$

- Para $n = 3,\ p = (x, y, z)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(x + t, y, z)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(x, y + t, z)$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(x, y, z + t$$

Derivadas Parciales.

- Hacer algunos ejemplos de derivadas
- $f = x^2y + y^3z.$
- $f = e^{xy^2}$
- etc.

Ejemplo.

- En economía, las derivadas parciales de una función de utilidad se denominan 'utilidades marginales', las derivadas parciales de una función de producción se denominan 'productividades marginales'.
- Consideremos, por ejemplo la función de producción Cobb-Douglas

$$f(K, L) = 5K^{1/3}L^{2/3}$$

  donde f es el número de unidades producidas, K es el capital y L es el trabajo.
- La formula anterior significa que si utilizamos K unidades de capital y L unidades de trabajo, entonces se producen $f(K, L) = 5K^{1/3}L^{2/3}$ unidades de un artículo.
- Las constantes $A = 5$, $\alpha = 1/3$ y $\beta = 2/3$ son parámetros de la tecnología de producción.

Ejemplo.

- Las 'productividades marginales' del capital y del trabajo son

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial K} &= \frac{5}{3} K^{-2/3} L^{2/3} \\ \frac{\partial f}{\partial L} &= \frac{10}{3} K^{1/3} L^{-1/3} \end{aligned}$$

- La productividad marginal del trabajo,

$$\frac{\partial f}{\partial L}(K, L)$$

se interpreta en economía como una **aproximación** a la variación en la producción del artículo cuando pasamos de utilizar K unidades de capital y L unidades de trabajo a utilizar una unidad más $L + 1$ de trabajo y las mismas unidades K de capital que antes.

Ejemplo.

Por ejemplo:

- $f(101, 100) \approx 501.661$,
- $f(100, 101) \approx 503.327$,
- $f(100, 100) \approx 500$.
- $f(101, 100) - f(100, 100) \approx 1.661$, $\quad \frac{\partial f}{\partial K}(100, 100) \approx 1.666$
- $f(100, 101) - f(100, 100) \approx 3.327$, $\quad \frac{\partial f}{\partial L}(100, 100) \approx 3.333$
- Vemos que la productividad del trabajo y del capital es positiva. Es decir si utilizamos más trabajo y/o más capital, aumenta la producción.

Ejemplo.

- Por otra parte, la productividad marginal del trabajo es decreciente en el trabajo y creciente en el capital. Esto se interpreta de la siguiente manera. Supongamos que la cantidad de capital utilizado K se mantiene constante. Si $L' > L$ entonces

$$f(K, L'+1) - f(K, L') < f(K, L+1) - f(K, L)$$

  Por ejemplo:

- $f(100, 101) - f(100, 100) = 3.327.$
- Pero, $f(100, 1001) - f(100, 1000) = 1.546.$
- Hemos usado que:
- $f(100, 100) = 500,\ f(100, 101) = 503.327,$
- $f(100, 1000) = 2320.794,\ f(100, 1001) = 2322.341.$

Ejemplo.

- Es decir, si se mantiene el capital constante, usar una unidad adicional de trabajo, cuando ya se está utilizando mucho trabajo, aumenta poco la producción.
- Podemos pensar que $f(K, L)$ es la producción de un producto agrícola en una parcela de tierra donde L son las personas contratadas y el tamaño K de la parcela se mantiene fijo. El impacto en la producción al contratar a una persona adicional es mayor si se están utilizando pocas personas comparado con el caso en que ya se están utilizando muchas.

Ejemplo.

- Supongamos que la cantidad de trabajo utilizado L se mantiene constante. Si $K' > K$ entonces

$$f(K', L+1) - f(K', L) > f(K, L+1) - f(K, L)$$

Es decir, el aumento en la producción al utilizar una unidad más de trabajo es creciente en las unidades de capital que se están utilizando. El capital y el trabajo son complementarios. En el ejemplo anterior, contratar a una persona adicional tiene un impacto mayor en la producción cuanto mayor es la parcela cultivada.

- Por ejemplo:
- $f(100, 101) - f(100, 100) = 3.327$.
- Pero, $f(1000, 101) - f(1000, 1000) = 7.169$.
- Hemos usado:
- $f(100, 100) = 500$, $f(100, 101) = 503.327$,
- $f(1000, 100) = 1077.217$, $f(1000, 101) = 1084.386$.

Gradiente.

- El **gradiente** de f en el punto p es $\nabla f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \ \frac{\partial f}{\partial x_2}(p), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \right)$ suponiendo que todas las derivadas parciales existen.
- $f = x^2 y + y^3 z$. Calcule $\nabla f(1, -1, 2)$.
- $f = e^{xy^2}$. Calcule $\nabla f(-1, 1)$.

Diferenciabilidad.

- f es diferenciable en p si $\lim_{v\to 0} \frac{f(p+v)-f(p)-\nabla f(p)\cdot v}{\|v\|} = 0$.
- $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)) : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en p si cada una de las funciones $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)$ es diferenciable en p.
- $n = 2$, f is differentiable at $p = (a, b)$ if
$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)-f(a,b)-\nabla f(a,b)\cdot(x-a,y-b)}{\|(x-a,y-b)\|} =$
$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)-f(a,b)-\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cdot(x-a)-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\cdot(y-b)}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}} = 0.$

Proposición

Si $f : D \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $p \in D$, entonces f es continua es ese punto.

Ejemplo.

Consideremos la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

- Vamos a demostrar que f no es diferenciable en el punto $p = (0,0)$.
- Primero, calculamos $\nabla f(0,0)$. Observemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t^3} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t^3} = 0$$

por lo que $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

Ejemplo.

- Entonces, f es diferenciable en el punto $p = (0,0)$ si y sólo si

$$
\begin{aligned}
0 &= \lim_{v \to 0} \frac{f(p+v) - f(p) - \nabla f(p) \cdot v}{\|v\|} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f\left((0,0)+(x,y)\right) - f(0,0) - \nabla f(p) \cdot (x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - (0,0) \cdot (x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}
\end{aligned}
$$

Ejemplo.

- Vamos a probar que este límite no existe. Consideramos la función

$$g(x,y) = \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

- Observamos que

$$\lim_{t\to 0} g(t,0) = \lim_{t\to 0} \frac{0}{(2t^2)^{3/2}} = 0$$

- Además,

$$\lim_{t\to 0} g(t,t) = \lim_{t\to 0} \frac{t^3}{(2t^2)^{3/2}} = \frac{1}{(2)^{3/2}} \neq 0$$

- por lo que el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

no existe y concluimos que f no es diferenciable en el punto $(0,0)$.

Ejemplo.

Consideremos la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

- Vamos a demostrar que f es diferenciable en el punto $p = (0,0)$.
- Primero, calculamos $\nabla f(0,0)$. Observamos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t^3} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t^3} = 0$$

- y obtenemos que $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

- Usamos la notación $v = (x, y)$,
- f es diferenciable en el punto $p = (0, 0)$ si y sólo si

$$
\begin{aligned}
0 &= \lim_{v \to 0} \frac{f(p+v) - f(p) - \nabla f(p) \cdot v}{\|v\|} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f((0,0)+(x,y)) - f(0,0) - \nabla f(p) \cdot (x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - (0,0) \cdot (x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}
\end{aligned}
$$

- En el Teorema del emparedado elegimos $g(x,y) = 0$, $h(x,y) = |y|$. Como, h es continua, vemos que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = 0$.
- Para $(x,y) \neq (0,0)$ tenemos que

$$
\begin{aligned}
\left| \frac{xy^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right| &= \frac{|x|\, y^2\, |y|}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\
&= \frac{\sqrt{x^2}\, y^2\, |y|}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\
&\leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}\, \left(x^2+y^2\right)\, |y|}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\
&= \frac{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}\, |y|}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\
&= |y|
\end{aligned}
$$

- por lo tanto,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0$$

- y la función es diferenciable en el punto $(0,0)$.

Diferenciabilidad.

Teorema

Supongamos que hay un $r > 0$ tal que las derivadas parciales, $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ existen en cada punto de la bola abierta $B(p, r)$ y son funciones continuas en dicha bola. Entonces, la función f es diferenciable en p.

-
- f está en la clase C^1 de D si todas las derivadas parciales de f existen y son funciones continuas en D. Escribimos $f \in C^1(D)$.
- Por ejemplo, $f(x, y, z) = xe^{yz} + y^2$ es diferenciable en cualquier punto (x, y).