Session 5
Matemáticas para la Economía I

Funciones continuas en varias variables. Puntos extremos de funciones

Grados en Economía, Estudios Internacionales–Economía y Derecho–Economía

Universidad Carlos III de Madrid

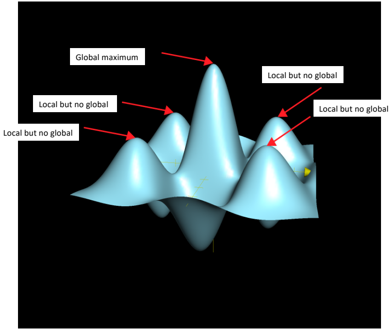
Puntos extremos.

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Diremos que un punto $p \in D$ es un

- **máximo global** de f en D si $f(x) \leq f(p)$, para cualquier otro $x \in D$.
- **mínimo global** de f en D si $f(x) \geq f(p)$, para cualquier otro $x \in D$.
- **máximo local** de f en D si hay algún $\delta > 0$ tal que $f(x) \leq f(p)$, para todo $x \in D \cap B(p, \delta)$.
- **mínimo local** de f en D si hay algún $\delta > 0$ tal que $f(x) \geq f(p)$, para cada $x \in D \cap B(p, \delta)$.

Observación: Sería más correcto decir que 'En el conjunto D la función f alcanza un máximo global en el punto p', etc. Por brevedad, usaremos las expresiones anteriores.

Puntos extremos.



Teorema de Weierstrass

Teorema

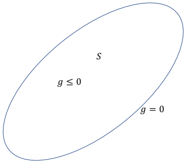
Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ y sea $f : D \to \mathbb{R}$ continua. Entonces, existen $x_0, x_1 \in D$ tales que para cualquier $x \in D$

$$f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$$

Esto es, x_0 es un mínimo global de f en D y x_1 es un máximo global de f en D.

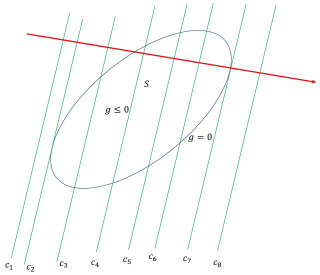
Curvas de nivel y puntos extremos

- Utilizando las curvas de nivel, es posible encontrar los puntos extremos de una función f en un conjunto S.
- Lo explicamos en dos dimensiones.
- Sea f una función de dos variables.
- Sea $S \subset \mathbb{R}^2$.
- Queremos encontrar los valores máximo y mínimo de f en S.
- Supongamos $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) \leq 0\}$ y $\partial S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$.



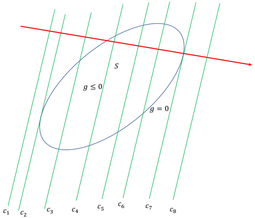
Curvas de nivel y puntos extremos

- En verde tenemos las curvas de nivel de la función f. Por simplicidad, se representan como líneas rectas.
- La flecha roja indica la dirección de crecimiento de las curvas de nivel. Es decir, $c_1 < c_2 < \cdots < c_8$.



Curvas de nivel y puntos extremos

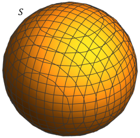
- Ni el valor máximo ni el mínimo se pueden alcanzar en una curva de nivel que intersecta a ∂S en dos puntos.
- Por ejemplo, moverse de un punto en el nivel de la curva c_5 a un punto en el nivel de la curva c_6 aumenta el valor de f. Y moverse de un punto en el nivel de la curva c_5 a un punto en el nivel de la curva c_4 disminuye el valor de f.



- El valor máximo es c_7. Se alcanza en un punto donde la curva de nivel es tangente a la curva $g = 0$.
- El valor mínimo es c_2. Se alcanza en un punto donde la curva de nivel es tangente a la curva $g = 0$.

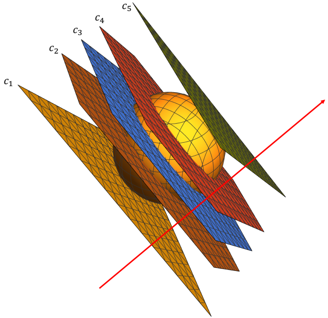
Curvas de nivel y puntos extremos

- La misma idea funciona en cualquier dimensión. Por ejemplo, sea f una función de tres variables y $S \subset \mathbb{R}^3$.
- Queremos encontrar los valores máximo y mínimo de f en S.
- Supongamos $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) \leq 0\}$ y $\partial S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = 0\}$. Tenga en cuenta que ahora ∂S es una superficie en $\mathbb{R}^3$.



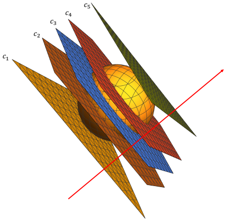
Curvas de nivel y puntos extremos

- Para simplificar, las curvas de nivel de la función f se representan como planos en $\mathbb{R}^3$.
- La flecha roja indica la dirección de crecimiento de las curvas de nivel. Es decir, $c_1 < c_2 < \cdots < c_5$.



Curvas de nivel y puntos extremos

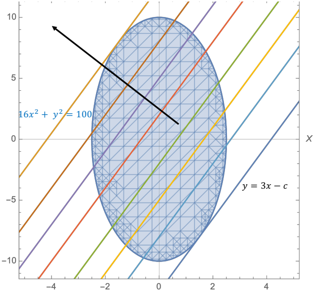
- Ni el valor máximo ni el mínimo se pueden alcanzar en una curva de nivel que intersecta a ∂S en una curva.
- Por ejemplo, moverse de un punto en el nivel de la curva c_3 a un punto en el nivel de la curva c_4 aumenta el valor de f. Y moverse de un punto en el nivel de la curva c_3 a un punto en el nivel de la curva c_2 disminuye el valor de f.



- El valor máximo es c_5. Se alcanza en un punto donde la curva de nivel es tangente a la superficie $g = 0$.
- El valor mínimo es c_1. Se alcanza en un punto donde la curva de nivel es tangente a la superficie $g = 0$.

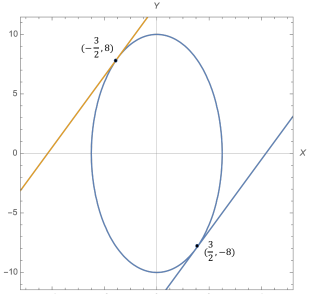
Ejemplo 1

- Consideremos el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 16x^2 + y^2 \leq 100\}$ y la función $f(x, y) = y - 3x$.
- La función es continua y el conjunto A es cerrado. También es acotado, por tanto A es compacto.
- Asi pues, la función f alcanza su máximo y su mínimo en A.
- Las curvas de nivel de f son lineas de la forma $y = 3x + C$. Graficamente,



Ejemplo 1.

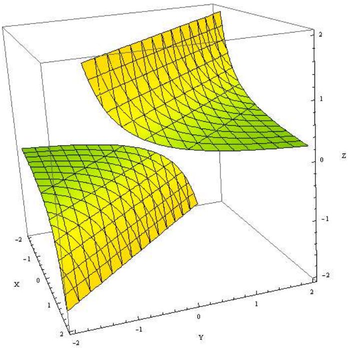
- El valor máximo y mínimo se alcanzan en el punto (x_0, y_0) donde la linea $y = 3x + C$ es tangente a la gráfica de $16x^2 + y^2 = 100$.



- Se tiene que $32x_0 + 2y_0 y'(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 3$ y $16x_0^2 + y_0^2 = 100$.
- Obtenemos los puntos $\left(-\frac{3}{2}, 8\right)$ (que corresponden a un máximo) y $\left(\frac{3}{2}, -8\right)$ (que corresponden a un mínimo).
- El máximo valor que alcanza la función es $\frac{25}{2}$. El valor mínimo de la función es $-\frac{25}{2}$.

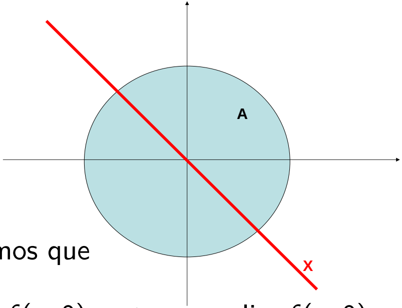
Ejemplo 2

Consideremos el conjuno $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}$ y la función $f(x,y) = \frac{1}{x+y}$. La gráfica de f es



Ejemplo 2

La función f es continua excepto en el conjunto $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$. Este conjunto intersecta con A,



Tomando $y = 0$, vemos que

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x, 0) = +\infty \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x, 0) = -\infty$$

y concluimos que f no alcanza su máximo ni mínimo en A.

Ejemplo 3.

Consideremos el conjunto $B_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 1, \quad x, y > 0\}$ y la función $f(x, y) = \frac{1}{x+y}$.

- La función $f(x, y) = \frac{1}{x+y}$ es continua en B_1, porque si $y = -x$, entonces $xy = -x^2 \leq 0$.
- El conjunto B_1 es cerrado pero no acotado. Por tanto, no es compacto.
- No podemos aplicar el teorema de Weierstrass.
- Por otro lado, podemos ver que $f(x, y) > 0$ en el conjunto B_1.
- Resumiendo, los puntos (n, n) for $n = 1, 2, \ldots$ pertencen al conjunto B_1 y

$$\lim_{n \to +\infty} f(n, n) = 0$$

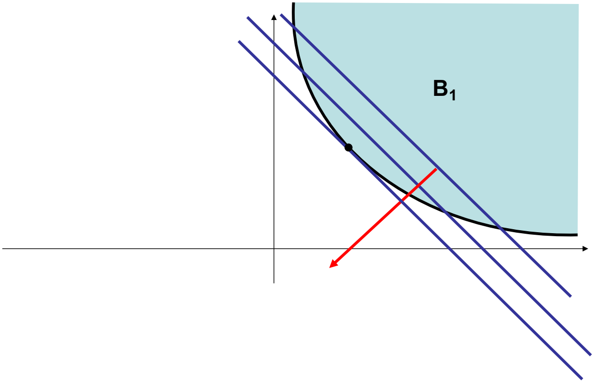
- Entonces, dado un punto $p \in B_1$, podemos encontrar un número natural n suficientemente grande tal que

$$f(p) > f(n, n) > 0$$

Concluimos que f no alcanza un mínimo en el conjunto B_1.

Ejemplo 3

- Por otro lado, las curvas de nivel de la función son las lineas recta $x + y = \frac{1}{c}$.
- Graficamente podemos ver que f alcanza el valor máximo en el punto $p = (a, b)$ donde la recta $x + y = \frac{1}{c}$ es tangente a la curva $xy = 1$.



Ejemplo 3

- La pendiente de la recta $x + y = \frac{1}{c}$ es $m = -1$. por qué?
- El punto $p = (a, b)$ está en la curva $xy = 1$. Por lo tanto, $ab = 1$
- Para calcular la recta tangente en el punto $p = (a, b)$ derivamos implícitamente $xy = 1$. Obtenemos $y + xy' = 0$.
- Sustituimos $y' = -1$, $x = a$, $y = b$ y obtenemos $b - a = 0$.
- Tenemos que $a = b$, $ab = 1$ y $a, b > 0$. Por lo tanto, $a = b = 1$.
- El valor máximo se alcanza en el punto $(1, 1)$.