Session 4
Matemáticas para la Economía I

Funciones continuas en varias variables

Grados en Economía, Estudios Internacionales–Economía y Derecho–Economía

Universidad Carlos III de Madrid

Funciones Continuas.

- Una función $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es **continua** en un punto $p \in D$ si $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$.
- Diremos que f es continua en D si lo es en todos los puntos $p \in D$.
- La función $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ es continua en $p \in D$ si y sólo si para cada $i = 1, \ldots, m$, las funciones f_i son continuas en p.
- Nos centramos en las funciones $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Ejemplos de Funciones Continuas.

Las siguientes funciones son continuas,

- Polinomios
- Funciones trigonométricas y exponenciales.
- Logaritmos en su dominio de definición.
- Potencias de funciones, en el dominio donde estén definidas.
- Composiciones y combinaciones algebráicas de las funciones anteriores.

Ejemplos de Funciones Continuas.

Teorema

Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ y sea $f, g : D \to \mathbb{R}$ una función continua en el punto p de D. Entonces,

1. *$f + g$ es contiua en p.*
2. *fg es continua en p.*
3. *si $f(p) \neq 0$, entonces hay algún conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ tal que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in U \cap D$ y*

$$\frac{g}{f} : U \cap D \to \mathbb{R}$$

es continua en p.

Teorema

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \to E$ (donde $E \subset \mathbb{R}^m$) es continua en $p \in D$ y sea $g : E \to \mathbb{R}^k$ una función continua en $f(p)$. Entonces, $g \circ f : D \to \mathbb{R}^k$ es continua en p.

Continuidad de funciones y conjuntos abiertos y cerrados

Teorema

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. f *es continua en* $\mathbb{R}^n$*.*
2. *Para cada subconjunto abierto* U *de* $\mathbb{R}$*, el conjunto* $f^{-1}(U) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \in U\}$ *es abierto.*
3. *Para cada subconjunto cerrado* $V \subset \mathbb{R}$*, el conjunto* $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \in V\}$ *es cerrado.*
4. *Para cada* $a, b \in \mathbb{R}$*, el conjunto* $\{x \in \mathbb{R}^n : a \leq f(x) \leq b\}$ *es cerrado.*
5. *Para cada* $a, b \in \mathbb{R}$*, el conjunto* $f^{-1}(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^n : a < f(x) < b\}$ *es abierto.*

Continuidad de funciones y conjuntos abiertos y cerrados.

Corolario

Supongamos que las funciones $f_1, \ldots, f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son continuas. Sea $-\infty \leq a_i \leq b_i \leq +\infty$, $i = 1, \ldots, k$. Entonces,

1. El conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : a_i < f_i(x) < b_i, \quad i = 1, \ldots, k\}$ es abierto.
2. El conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : a_i \leq f_i(x) \leq b_i, \quad i = 1, \ldots, k\}$ es cerrado.

Ejemplo 1.

Considere la función

$$\begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{if } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{if } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

vamos a demostrar que es continua en $\mathbb{R}^2$.

- La función f es continua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ porque en ese conjunto es un cociente de polinomios y el denominador no se anula en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
- Para probar la continuidad en $(0, 0)$ vamos a demostrar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$.
- En el Teorema del encaje, elegimos $g(x, y) = 0$, $h(x, y) = |x|$.
- Las funciones g y h son continuas por lo que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x, y) = 0$ y $\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x, y) = h(0, 0) = 0$.

Ejemplo 1.

- Finalmente, tenemos que,

$$|f(x,y)| = |x|\frac{y^2}{x^2+y^2} \leq |x|$$

- Por el Teorema del encaje, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| = 0$.
- Y, puesto que, $-|f(x,y)| \leq f(x,y) \leq |f(x,y)|$, aplicamos otra vez el Teorema del Encaje para concluir que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

- Por lo tanto, f es también continua en $(0,0)$.

Ejemplo 2.

Considere la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2\sqrt{|y|}}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

vamos a demostrar que es continua en $\mathbb{R}^2$.

- La función f es continua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ porque en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ f es un cociente de funciones continuas y el denominador no se anula en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
- Para probar la continuidad en $(0,0)$ vamos a demostrar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$.
- En el Teorema del encaje, elegimos $g(x,y) = 0$, $h(x,y) = \sqrt{|y|}$.
- Las funciones g y h son continuas por lo que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$ y $\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = h(0,0) = 0$.

Ejemplo 2.

- Finalmente, tenemos que,

$$|f(x,y)| = \frac{x^2\sqrt{|y|}}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{x^2+y^2}\sqrt{|y|} \leq \sqrt{|y|}$$

- Por el Teorema del encaje, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| = 0$.
- Y, puesto que, $-|f(x,y)| \leq f(x,y) \leq |f(x,y)|$, aplicamos otra vez el Teorema del Encaje para concluir que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

- Por lo tanto, f es también continua en $(0,0)$.

Ejemplo 3.

Considere la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{if } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{if } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

vamos a demostrar que es continua en $\mathbb{R}^2$.

- La función f es continua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ porque en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ f es un cociente de funciones continuas y el denominador no se anula en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
- Para probar la continuidad en $(0,0)$ vamos a demostrar que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$.
- En el Teorema del encaje, elegimos $g(x,y) = 0$, $h(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.
- Las funciones g y h son continuas por lo que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0$ y $\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = h(0,0) = 0$.

Ejemplo 3.

- Finalmente, tenemos que,
$|f(x,y)| = \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \frac{|x||y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}.$
- Por el Teorema del encaje, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| = 0$.
- Y, puesto que, $-|f(x,y)| \leq f(x,y) \leq |f(x,y)|$, aplicamos otra vez el Teorema del Encaje para concluir que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

- Por lo tanto, f es también continua en $(0,0)$.

Ejemplo 4.

Considere la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} e^{xy} & \text{if } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{if } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Determine el subconjunto de $\mathbb{R}^2$ donde la función f es continua.

- La función f es continua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ porque en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ f es un cociente de funciones continuas y el denominador no se anula en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
- Vamos a demostrar que f no es continua en $(0,0)$.
- Consideremos la curva $\alpha(t) = (t,t)$ obtenemos $\lim_{t\to 0} f(\alpha(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{2t^2} e^{t^2} = \frac{1}{2}$.
- Si usamos ahora la curva $\sigma(t) = (t, t^2)$ vemos que $\lim_{t\to 0} f(\sigma(t)) = \lim_{t\to 0} \frac{t^3}{t^2+t^4} e^{t^3} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{1+t} e^{t^3} = 0$.
- Por lo tanto, el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe.
- La función f no es continua en el punto $(0,0)$.