

Sesión 3

Matemáticas para la Economía I

Funciones de varias variables.

Grados en Economía, Estudios Internacionales–Economía y Derecho–Economía

Universidad Carlos III de Madrid

Límites de funciones.

Definición:

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $L \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}^n$. Diremos que

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$$

si dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

cuando $0 < \|x - p\| < \delta$.

- Esta es la generalización natural del concepto de límite en funciones de una variable a funciones de varias variables. Debemos notar que la distancia $|\cdot|$ en $\mathbb{R}$ es sustituida por la distancia $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^n$).
- La interpretación es la misma, i.e., $|x - y|$ es la distancia de x a y en $\mathbb{R}$ mientras que $\|x - y\|$ es la distancia de x a y en $\mathbb{R}^n$.

Observaciones sobre límites.

- El límite de una función en un punto no siempre existe.
- Si el límite existe, es único.
- El cálculo de límites en varias variables es más complicado que el cálculo de límites en sólo una variable.

Mostrando que el límite existe. Los casos fáciles

Proposición (4): Supongamos que f es una función del siguiente tipo:

- 1 Un polinomio, o una función exponencial, o una función trigonométrica o un logaritmo, o una función irracional o un valor absoluto.
- 2 Una composición o una combinación algebraica de las funciones anteriores.

Sea p un punto en el dominio de f . Entonces

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$$

Ejemplo

Sea $f(x, y) = \frac{xy^2 + e^{2x-y} + \ln(x^2 + y)}{x^2 y}$. Entonces

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} f(x,y) &= \left. \frac{xy^2 + e^{2x-y} + \ln(x^2 + y)}{x^2 y} \right|_{x=1, y=2} \\ &= \frac{4 + e^0 + \ln(1 + 2)}{2} \\ &= \frac{5 + \ln 3}{2}\end{aligned}$$

Mostrando la existencia de límite. Dos herramientas útiles.

Los siguientes resultados nos sirven para demostrar que el límite existe.

(Teorema del encaje) Sean $f, g, h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y supongamos que

- ❶ $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todo x en alguna bola abierta centrada en p .
- ❷ $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = \lim_{x \rightarrow p} h(x) = L$.

Entonces,

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$$

Proposición: Las siguientes desigualdades se cumplen.

- ❶ $|xy| \leq \frac{1}{2} (x^2 + y^2) \leq x^2 + y^2$.
- ❷ $|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}$.
- ❸ $|y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}$.

Ejemplo

Consideremos la función

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- Notemos que para $(x, y) \neq (0, 0)$: $\left| \cos\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \right| \leq 1$.
- Así pues, $0 \leq |f(x, y)| \leq x^2 + y^2$.
- En el Teorema del encaje elegimos $g(x, y) = 0$, $h(x, y) = x^2 + y^2$.
- Tenemos que $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} g(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} h(x, y) = 0$.
- Concluimos que $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$.

Ejemplo

Consideremos la función $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

- Notar que $|xy| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x^2 + y^2} = x^2 + y^2$. Para $(x, y) \neq (0, 0)$:
- $0 \leq \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- Entonces, $0 \leq |f(x, y)| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$.
- En el Teorema del encaje elegimos $g(x, y) = 0$, $h(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- Por la proposición 4 tenemos que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h(x, y) = 0$.
- Concluimos que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$.

Ejemplo

Considere la función $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

- Notar que $|xy| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x^2 + y^2} = x^2 + y^2$. mientras que para $(x, y) \neq (0, 0)$:
- $0 \leq \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- Por lo tanto, $0 \leq |f(x, y)| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$.
- En el Teorema del encaje elegimos $g(x, y) = 0$, $h(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- Por la Proposición 4, tenemos que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h(x, y) = 0$.
- Por el Teorema del emparedado, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |f(x, y)| = 0$.
- Como, $-|f(x, y)| \leq f(x, y) \leq |f(x, y)|$, aplicamos otra vez el Teorema del emparedado para concluir que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$$

Ejemplo

Considere la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$?

- Considere las funciones

$$g(x, y) = 0, \quad h(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- Tenemos que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} h(x, y) = 0$.

Ejemplo

- Por otro lado,

$$|f(x, y)| = \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- Por lo tanto, $g(x, y) \leq |f(x, y)| \leq h(x, y)$
- Por el Teorema del emparedado, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |f(x, y)| = 0$.
- Y, puesto que, $-|f(x, y)| \leq f(x, y) \leq |f(x, y)|$, aplicamos otra vez el Teorema del emparedado para concluir que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$$

Algunas herramientas para demostrar que el límite no existe: Límites iterados

- Suponga que $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$ y que los siguientes límites

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x,y)$$

$$\lim_{y \rightarrow b} f(x,y)$$

existen para (x,y) en un disco que contiene (a,b) .

- Definimos las funciones

$$g_1(y) = \lim_{x \rightarrow a} f(x,y) \quad g_2(x) = \lim_{y \rightarrow b} f(x,y)$$

- Entonces,

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{y \rightarrow b} f(x,y) \right) = \lim_{x \rightarrow a} g_2(x) = L$$

$$\lim_{y \rightarrow b} \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x,y) \right) = \lim_{y \rightarrow b} g_1(y) = L$$

Límites iterados

- Si sabemos de antemano que el límite existe, podemos usar los límites iterados para calcular su valor.
- O, si para alguna función $f(x, y)$ podemos probar que

$$\lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y) \neq \lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$$

Entonces $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y)$ no existe.

- Sin embargo, los **límites iterados no se pueden usar para demostrar que un límite existe.**

Límites iterados . Ejemplo

Considere la función,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- Notar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

- Pero,

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

- Por lo tanto, el límite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

no existe.

Otras herramientas para demostrar que un límite no existe.

Límites a través de curvas.

Proposición

Sea $p \in D \subset \mathbb{R}^n$ y $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Considere una curva $\sigma : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow D$ tal que $\sigma(0) = p$, $\sigma(t) \neq p$ cuando $t \neq 0$ y $\lim_{t \rightarrow 0} \sigma(t) = p$. Suponga, $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$. Entonces,

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\sigma(t)) = L$$

Límites a través de curvas. Ejemplo

Considere la función,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- Notar que los límites iterados

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^2} = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^2} = 0$$

coinciden.

- Pero, si consideramos la curva, $\sigma(t) = (t, t)$, el límite

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\sigma(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2}$$

no coincide con el valor de los límites iterados.

- Por lo tanto, el límite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ no existe.

Límites a través de curvas. Ejemplo

Considere la función,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- Notar que los límites iterados

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^4} = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^2} = 0$$

coinciden.

- Pero, si consideramos la curva, $\sigma(t) = (t, t^2)$, el límite

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, t^2) = \lim_{x \rightarrow 0} f(t, t^2) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^4}{t^4 + t^4} = \frac{1}{2}$$

no coincide con el valor de los límites iterados.

- Por lo tanto, el límite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ no existe.

Álgebra de límites

Considere dos funciones $f, g : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y suponga

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L_1, \quad \lim_{x \rightarrow p} g(x) = L_2$$

Entonces,

- ❶ $\lim_{x \rightarrow p} (f(x) + g(x)) = L_1 + L_2.$
- ❷ $\lim_{x \rightarrow p} (f(x) - g(x)) = L_1 - L_2.$
- ❸ $\lim_{x \rightarrow p} f(x)g(x) = L_1L_2.$
- ❹ Si $a \in \mathbb{R}$ entonces $\lim_{x \rightarrow p} af(x) = aL_1.$
- ❺ Si, además, $L_2 \neq 0$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$$