

Sesión 2

Matemáticas para la Economía I

Funciones de varias variables.

Grados en Economía, Estudios Internacionales y AdEconomía y Derecho y Economía

Universidad Carlos III de Madrid

Ejemplos de funciones $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x + y - 1$.
- $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + \sqrt{1 + z^2}$.
- $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = ze^{x^2+y^2}$.
- $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z, t) = \text{sen}x + y + ze^t$.

Funciones $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

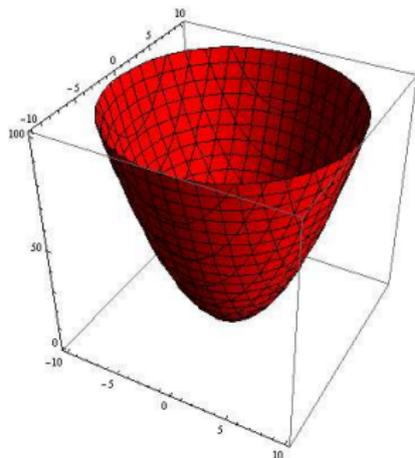
- Por ejemplo, $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y, z) = (xe^y + \operatorname{sen}z, x^2 + y^2 - z^2)$.
- Podemos escribir $f(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z))$ con $f_1(x, y, z) = xe^y + \operatorname{sen}z$, $f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$
- De esta manera, nos centraremos en las funciones de tipo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Dominio Implícito

- Cuando escribimos, por ejemplo, $f(x, y) = \frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$ se entiende que $x \neq 1$.
- La expresión de f define implícitamente el dominio de la función.
- Para la función anterior necesitamos que $x + y + 1 \geq 0$ y que $x \neq 1$.
- Así pues, se asume, implícitamente que el dominio de la función $f(x, y) = \frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$ es el conjunto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq -1, x \neq 1\}$.
- Usualmente, escribimos $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ para hacer explícito el dominio de f .

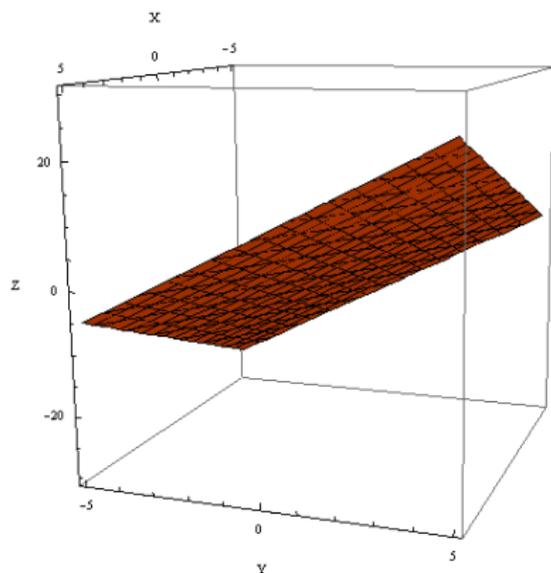
Gráfica de una función de varias variables.

- La **gráfica** de $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es $G(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : y = f(x), x \in D\}$.
- La gráfica puede ser dibujada sólo para $n = 1, 2$.
- La gráfica de $f(x, y) = x^2 + y^2$ es



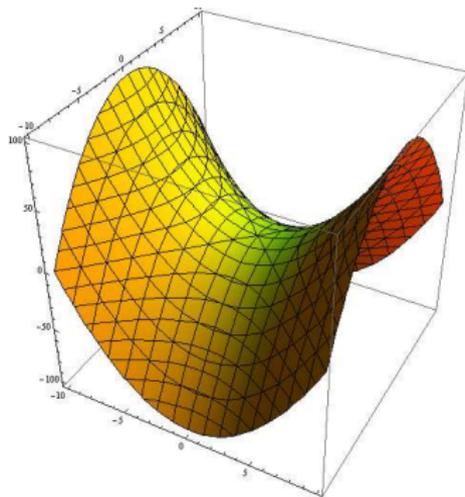
Ejemplo

La gráfica de $f(x, y) = 2x + 3y$ es



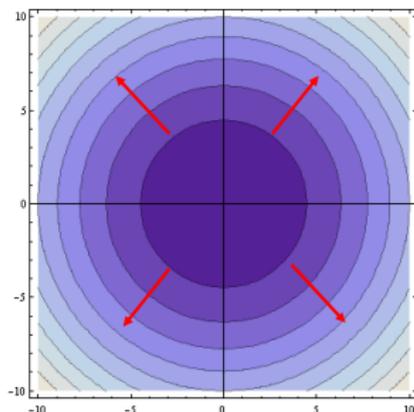
Ejemplo

La gráfica de $f(x, y) = -x^2 + y^2$ es



Curvas y superficies de nivel

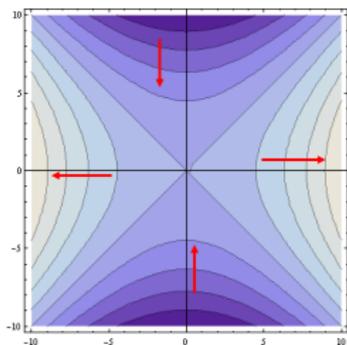
- Dada la función $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{R}$ definimos las **superficies de nivel** de f como los conjuntos $C_k = \{x \in D : f(x) = k\}$.
- Si $n = 2$, las superficies de nivel se llaman **curvas de nivel**.
- Ejemplo. Las curvas de nivel de $f(x, y) = x^2 + y^2$ son



- Las flechas indican la dirección en la que f crece.

Ejemplo

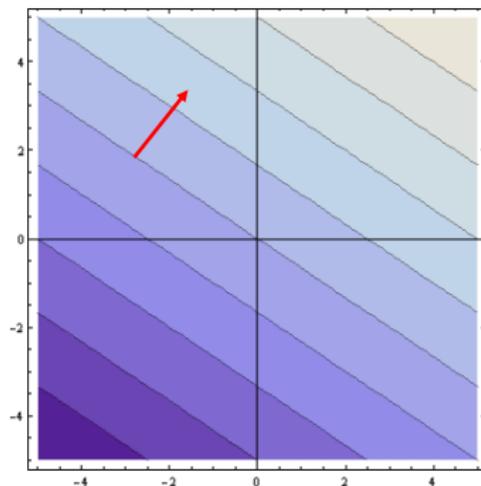
- Las curvas de nivel de $f(x, y) = x^2 - y^2$ son



- Las flechas indican la dirección en la que f crece.

Ejemplo

- Las curvas de nivel de $f(x, y) = 2x + 3y$ son



- Las flechas indican la dirección en la que f crece.