Sesión 14
Matemáticas para la Economía II

Funciones cóncavas y convexas. Ejemplos y aplicaciones.

Grados en Administración de Empresas, Finanzas y Contabilidad, Empresa y Tecnología, Estudios Internacionales y Administración de Empresas y Derecho y Administración de Empresas

Universidad Carlos III de Madrid

Ejemplo.

- Sea $f(x,y,z) = 2abyz + ax^2 + 2axy + 2ay^2 + cz^2 + 3x + y + 15z - 73$, con $a,b,c \in \mathbb{R}$, $abc \neq 0$. ¿Para qué valores de $a,b,c \in \mathbb{R}$, $abc \neq 0$ es f cóncava/convexa?
- Tenemos $\nabla f(x,y,z) =$ $(2ax + 2ay + 3, 2abz + 2ax + 4ay + 1, 2aby + 2cz + 15)$.

$$\mathrm{H}(f)(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2a & 2a & 0 \\ 2a & 4a & 2ab \\ 0 & 2ab & 2c \end{pmatrix}$$

- Obtenemos $D_1 = 2a$, $D_2 = 4a^2 > 0$, $D_3 = |A| = 8a^2c - 8a^3b^2 = 8a^2\left(c - ab^2\right)$.
- Se puede ver que para $a > 0$ y $c > ab^2$ tenemos que $D_1, D_2, D_3 > 0$ y la función es convexa.
- Para $a < 0$ y $c < ab^2$ tenemos que $D_1 < 0, D_2 > 0, D_3 < 0$ y la función es cóncava.

Ejemplo.

- Tomamos $a = -1$, $b = 2$, $c = -5$.
- Obtenemos la función
$f(x, y, z) = -x^2 - 2xy + 3x - 2y^2 - 4yz + y - 5z^2 + 15z - 73.$
- Dado que $c < ab^2$, la función f es cóncava.
- El conjunto
$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x^2 - 2xy + 3x - 2y^2 - 4yz + y - 5z^2 + 15z \geq 0\}$
es convexo.
- Dado que $f(x, y, z) \leq f(1, 0, 0) + \nabla f(1, 0, 0) \cdot (x - 1, y, z)$,
$f(1, 0, 0) = -71$,
$\nabla f(x, y, z) = (3 - 2x - 2y, 1 - 2x - 4y - 4z, 15 - 4y - 10z)$ y
$\nabla f(1, 0, 0) = (1, -1, 15)$, tenemos la desigualdad,
$-x^2 - 2xy + 3x - 2y^2 - 4yz + y - 5z^2 + 15z - 73 \leq$
$-71 - 1 + x - y + 15z = -72 + x - y + 15z$, para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Ejemplo. Examen final enero 2021.

- Considere la función $f(x, y) = cxy + x^2y + 2x + y^2 - 15y + 1$ definida en $\mathbb{R}^2$, con $c \in \mathbb{R}$.
- ¿Cuál es es el mayor subconjunto abierto D de $\mathbb{R}^2$ en el cual la función f es estrictamente convexa? ¿Para qué valores de c es el conjunto D convexo?
- Tenemos que $\nabla f(x, y) = \left(cy + 2xy + 2, cx + x^2 + 2y - 15\right)$ $\mathrm{H}(f)(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2y & c + 2x \\ c + 2x & 2 \end{pmatrix}$
- $D_1 = 2y$, $D_2 = 4y - (c + 2x)^2$
- Vemos que $D_1 > 0$ si y sólo si $y > 0$ y $D_2 > 0$ si y sólo si $y > \frac{1}{4}(c + 2x)^2$.
- Por lo tanto,

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > \frac{1}{4}(c + 2x)^2\}$$

Ejemplo. Continuación del examen final de enero 2021.

- Considere la función
$$g(x) = \frac{1}{4}(c + 2x)^2$$
- Como $g''(x) = 2 > 0$, la funcióng g es convexa.
- Por lo tanto, el conjunto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > \frac{1}{4}(c + 2x)^2\}$ es convexo para todos los valore de c.

Ejemplos.

- Examen final, enero 2024: Demuestre que el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + x \leq 0 \leq x + 5\}$ es convexo.
- Examen final, enero 2023: Demuestre que el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 4 \leq y \leq 4 - x^2\}$ es convexo.
- Examen final, enero 2022: Demuestre que el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 25, x + y \geq 5$ es convexo.
- Examen final, enero 2021: Demuestre que el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leq x - 1, x \leq 5\}$ es convexo.

Concavidad, convexidad y preferencias.

- Consideramos un consumidor cuyas preferencias (sobre dos bienes) están representadas por la función de utilidad $u(x, y)$.
- Las curvas de indiferencia del consumidor son los conjuntos

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0, \quad u(x, y) = C\}$$

  con $C \in \mathbb{R}$.
- Supongamos que la función $u(x, y)$ es diferenciable y que

$$\frac{\partial u}{\partial x} > 0 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} > 0$$

- Aplicando el Teorema de la función implícita, vemos que la ecuación

$$u(x, y) = C$$

  define a y como una función de x.

Concavidad, convexidad y preferencias

- El conjunto

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0, \quad u(x,y) = C\}$$

se puede representar como la gráfica de la función $y(x)$.

- derivando implícitamente la ecuación $u(x,y) = C$ podemos calcular la derivada y'

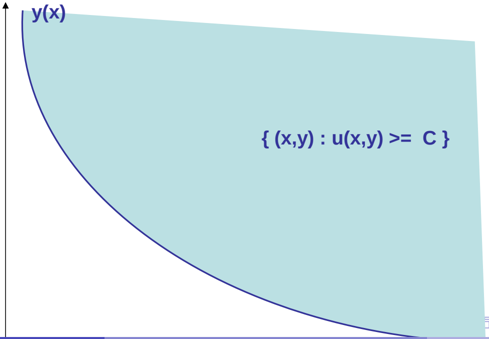
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} y'(x) = 0$$

- Aplicando de nuevo el Teorema de la función implícita obtenemos una ecuación para la derivada segunda y''

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} y'(x) + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y}\left(y'(x)\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x} y''(x) = 0 \qquad (0.1)$$

Concavidad, convexidad y preferencias

- Una de las hipótesis estándar en Teoría Económica es que el conjunto formado por las cestas preferidas a una dada es un conjunto convexo. En términos de la función de utilidad esto se traduce en que el conjunto
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0, \quad u(x,y) > C\}$$
es convexo.



Concavidad, convexidad y preferencias

- Supongamos que la función $u(x,y)$ es cóncava y de clase C^2.
- El conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x,y > 0, \quad u(x,y) > C\}$ es convexo.
- Además, para todo $h,k \in \mathbb{R}$ se verifica que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} h^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} hk + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} k^2 \leq 0$$

- Si en esta ecuación tomamos $h = 1$, $k = y'(x)$ obtenemos que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} y'(x) + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} \left(y'(x)\right)^2 \leq 0$$

- y despejando y'' en la ecuación 0.1 obtenemos

$$y''(x) = -\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} y'(x) + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} \left(y'(x)\right)^2}{\partial u / \partial x} \geq 0$$

Concavidad, convexidad y preferencias

- Es decir, la función $y(x)$ es convexa, por lo que $y''(x)$ es creciente.
- Como $\mathrm{MRS}(x, y(x)) = -y'(x)$, vemos que si las preferencias del consumidor son convexas su relación marginal de sustitución es decreciente.