Sesión 13
Matemáticas para la Economía II

Funciones cóncavas y convexas. Definición y caracterizaciones.

Grados en Administración de Empresas, Finanzas y Contabilidad, Empresa y Tecnología, Estudios Internacionales y Administración de Empresas y Derecho y Administración de Empresas

Universidad Carlos III de Madrid

Concavidad y convexidad.

Asumimos que: $D \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto convexo y abierto.

- f es **cóncava** en D si para todo $\lambda \in [0,1]$ y $x, y \in D$ tenemos que

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

- f es **convexa** en D si para todo $\lambda \in [0,1]$ y $x, y \in D$ tenemos que

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

- f es convexa en D si y sólo si $-f$ es cóncava en D.

Concavidad y convexidad.

- f es **estríctamente cóncava** en D si para cada $\lambda \in (0,1)$ y $x, y \in D$, $x \neq y$ tenemos que

$$f\left(\lambda x + (1-\lambda)y\right) > \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

- f es **estríctamente convexa** en D si para cada $\lambda \in (0,1)$ y $x, y \in D$, $x \neq y$ se tiene que

$$f\left(\lambda x + (1-\lambda)y\right) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

- f es estríctamente convexa en D si y sólo si $-f$ es estríctamente cóncava en D.

Las funciones lineales son cóncavas and convexas.

- Las funciones lineales son cóncavas and convexas, Pero no son ni estrictamente cóncavas ni estrictamente convexas.
- Pro ejemplo, $f(x, y) = 2x - y$, $f(x, y, z) = z - 3x + 5y$

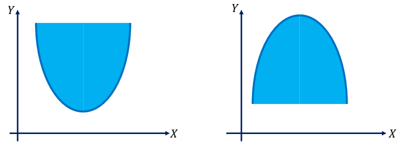
Concavidad y convexidad.

Proposición

Sea D un conjunto convexo, y abierto de $\mathbb{R}^n$. Entonces,

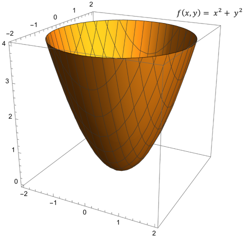
1. f es cóncava $\Leftrightarrow$ el conjunto $\{(x, y) : x \in D, y \leq f(x)\}$ es convexo.
2. f es convexa $\Leftrightarrow$ el conjunto $\{(x, y) : x \in D, y \geq f(x)\}$ es convexo.
3. f es estríctamente convexa $\Leftrightarrow$ el conjunto $\{(x, y) : x \in D, y \geq f(x)\}$ es convexo y la gráfica de f no contiene segmentos.
4. f es estríctamente cóncava $\Leftrightarrow$ el conjunto $\{(x, y) : x \in D, y \leq f(x)\}$ es convexo y la gráfica de f no contiene segmentos.

Gráficamente,

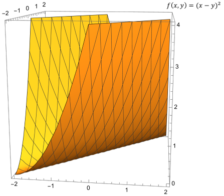


Ejemplos.

- $f(x,y) = x^2 + y^2$ es estríctamente convexa.



- $f(x,y) = (x-y)^2$ es convexa, pero no estríctamente convexa.



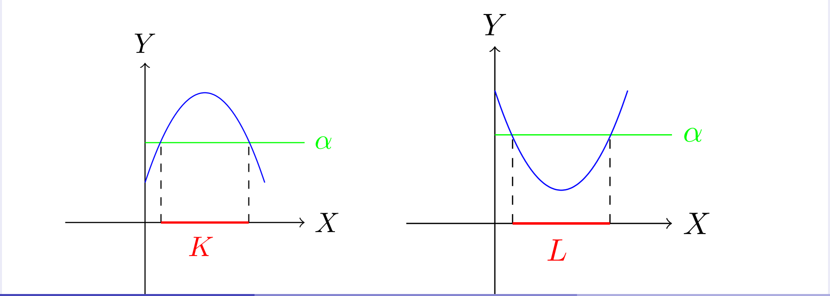
Concavidad y convexidad.

Proposición

Sea D un conjunto convexo y abierto de $\mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces,

1. Si f es cóncava, entonces positiva conjunto contorno superior $K = \{x \in D : f(x) \geq \alpha\}$ es convexo para cada $\alpha \in \mathbb{R}$
2. Si f es convexa, entonces el conjunto contorno inferior $L = \{x \in D : f(x) \leq \alpha\}$ es convexo para cada $\alpha \in \mathbb{R}$

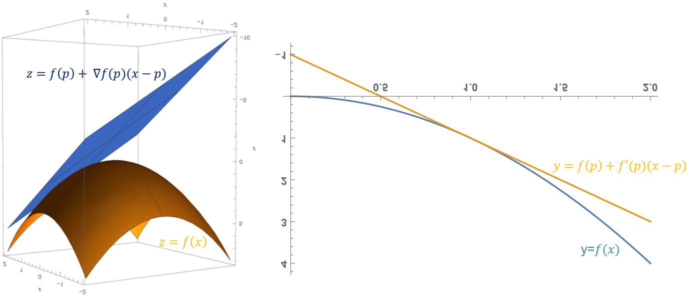
Gráficamente,



Condiciones de primer orden para la concavidad.

- Supongamos que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es cóncava y diferenciable en un conjunto convexo D.
- El plano tangente a la gráfica de f en $p \in D$ queda por arriba de la gráfica de f.
- Esto quiere decir que

$$f(x) \leq f(p) + \nabla f(p) \cdot (x - p), \quad \text{para cada } x \in D$$



Condiciones de primer orden para la concavidad.

Proposición

Supongamos $f \in C^1(D)$. Entonces,

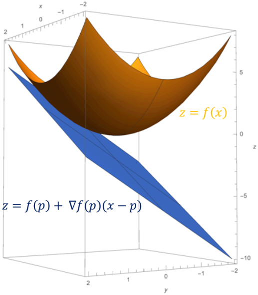
1. f es cóncava en D si y sólo si para $u, v \in D$ tenemos que
$$f(u) \leq f(v) + \nabla f(v) \cdot (u - v)$$

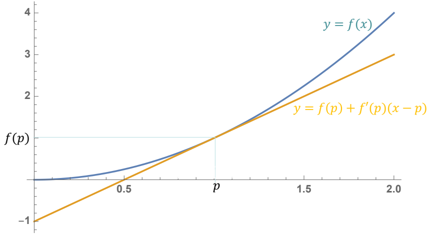
2. f es estríctamente cóncava en D si y sólo si para todo $u, v \in D$, $u \neq v$, tenemos que
$$f(u) < f(v) + \nabla f(v) \cdot (u - v)$$

Condiciones de primer orden para la convexidad.

- Supongamos que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es convexa y diferenciable en un conjunto convexo D.
- El plano tangente a la gráfica de f en el punto $p \in D$ queda por debajo de la gráfica de f.
- Esto significa que

$$f(x) \geq f(p) + \nabla f(p) \cdot (x - p), \quad \text{para cada } x \in D$$





Condiciones de primer orden para la convexidad.

Proposición

Supongamos que $f \in C^1(D)$. Entonces,

1. f es convexa en D si y sólo si para todo $u, v \in D$ tenemos que

$$f(u) \geq f(v) + \nabla f(v) \cdot (u - v)$$

2. f es estríctamente convexa en D si y sólo si para todo $u, v \in D$, $u \neq v$, tenemos que

$$f(u) > f(v) + \nabla f(v) \cdot (u - v)$$

Condiciones de segundo orden para la concavidad/convexidad.

Proposición

Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ abierto y convexo. Sea $f \in C^2(D)$ y sea $\mathrm{H}\, f(p)$ la matriz hessiana de f en el punto p. Entonces,

1. f es cóncava en D si y sólo si para cada $p \in D$, $\mathrm{H}\, f(p)$ es semidefinida negativa o definida negativa.
2. f es convexa en D si y sólo si para cada $p \in D$, $\mathrm{H}\, f(p)$ es semidefinida positiva o definida positiva.
3. If $\mathrm{H}\, f(p)$ es definida negativa para cada $p \in D$, entonces f es estríctamente cóncava en D.
4. Si $\mathrm{H}\, f(p)$ es definida positiva para cada $p \in D$, entones f es estríctamente convexa en D.

Condiciones de segundo orden para la concavidad/convexidad.

- Si f es estríctamente convexa, entonces $\mathrm{H}\, f(x, y)$ es definida positiva excepto en un conjunto "pequeño".
- Por ejemplo, $f(x, y) = x^4 + y^4$ es estríctamente convexa
- y
$$\mathrm{H}\, f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$$
es definida positiva si $xy \neq 0$, esto es, es definida positiva en todo el espacio $\mathbb{R}^2$ excepto en los dos ejes $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$.
- Para puntos en los ejes (esto es para puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $xy = 0$) la matriz hessiana es semidefinida positiva.