Sesión 12
Matemáticas para la Economía II

Formas Cuadráticas

Grados en Administración de Empresas, Finanzas y Contabilidad, Empresa y Tecnología, Estudios Internacionales y Administración de Empresas y Derecho y Administración de Empresas

Universidad Carlos III de Madrid

Formas Cuadráticas.

- Una **froma cuadrática** de orden n es una función $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de la forma
$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$
para algunos números reales $a_{ij} \in \mathbb{R}$ $i, j = 1, \ldots, n$
- $Q(x, y, z) = x^2 - 2xy + 4xz + 6yz + 5z^2$.
- En notación matricial,
$$Q(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$
$$= x^2 - 2xy + 4xz + 6yz + 5z^2$$
- Hay una única manera de asociar a la forma cuadrática una matriz simétrica.

.

- Cada forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, puede escribirse de manera única $Q(x) = xAx^t$ siendo $A = A^t$ una matriz simétrica.
- Observemos que la matriz simétrica

$$A = (a_{ij})$$

está asociada con la forma cuadrática

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j$$

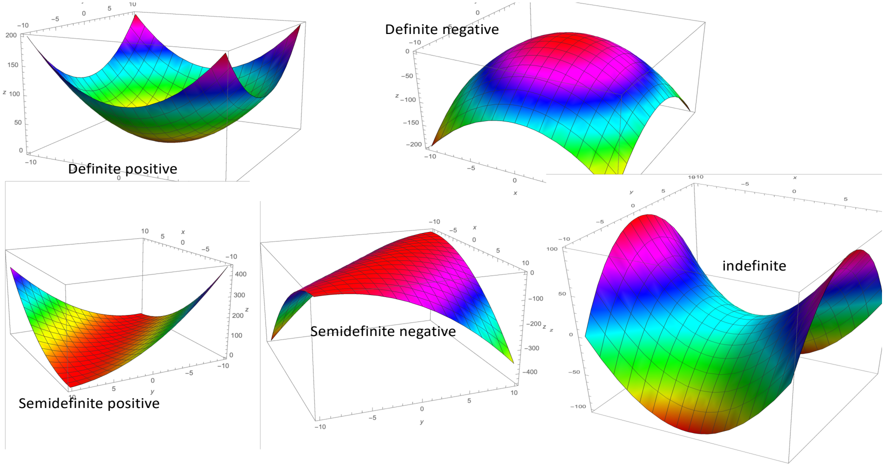
- Identificaremos la forma cuadrática $Q(x) = xAx^t$ con la matriz A.

Clasificación de formas cuadráticas.

Una forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es

1. **Definida positiva** si $Q(x) > 0$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$.
2. **Definida Negativa** si $Q(x) < 0$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$.
3. **Semidefinida positiva** si $Q(x) \geq 0$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y $Q(x) = 0$ para algún $x \neq 0$.
4. **Semidefinida negativa** si $Q(x) \leq 0$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$ y $Q(x) = 0$ para algún $x \neq 0$.
5. **Indefinida** si existe al menos dos vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$ tales que $Q(x) > 0$ y $Q(y) < 0$.

Clasificación de las formas cuadráticas.



Ejemplos.

- $Q_1(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + z^2$ es definida positiva.
- $Q_2(x, y, z) = -2x^2 - y^2$ es semidefinida negativa.
- $Q_3(x, y) = -2x^2 - y^2$ es definida negativa.
- $Q_4(x, y, z) = x^2 - y^2 + 3z^2$ es indefinida.
- Las formas cuadráticas previas son fáciles de clasificar porque son diagonales, i.e.

$$Q_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Q_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad Q_4 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Clasificación de formas cuadráticas diagonales.

Proposición

Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$. Entonces, la forma cuadrática $Q(x) = xAx^t = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$ es

1. definida positiva si y sólo si $\lambda_i > 0$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$;
2. definida negativa si y sólo si $\lambda_i < 0$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$;
3. semidefinida positiva si y sólo si $\lambda_i \geq 0$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ y $\lambda_k = 0$ para algún $k = 1, 2, \ldots, n$;
4. semidefinida negativa si y sólo si $\lambda_i \leq 0$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$ y $\lambda_k = 0$ para algún $k = 1, 2, \ldots, n$;
5. indefinida si y sólo si hay algún $\lambda_i > 0$ y algún $\lambda_i < 0$.

Método de los menores principales. $|A| \neq 0$

- Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{24} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ una matriz simétrica.
- Los menores principales son

$$D_1 = a_{11}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \ \ldots, \ Dn = |A|$$

- Supongamos que $|A| \neq 0$. Entonces,
  1. A es definida positiva si y sólo si $D_i > 0$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$;
  2. A es definida negativa si y sólo si $(-1)^i D_i > 0$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$;
  3. si ni (1) ni (2) se cumplen, entones Q es indefinida.

Ejemplo.

- Consideremos la forma cuadrática $Q(x, y, z) = x^2 + 2xy - 2xz - 2y^2 + 4yz + 3z^2$.
- La matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- $D_1 = 2 > 0$, $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -3 < 0$.
- La forma cuadrática es indefinida.

Ejemplo.

- Consideremos la forma cuadrática $Q(x,y,z) = 2x^2 + 2xy + y^2 + 2yz + 3z^2$.
- La matriz asociada es
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
- $D_1 = 2 > 0,\ D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0,\ D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 > 0.$
- La forma cuadrática es definida positiva.

Ejemplo.

- Consideremos la forma cuadrática $Q(x,y,z) = -2x^2 + 2xy - 3y^2 + 2yz - z^2$.
- La matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- $D_1 = -2 < 0$, $D_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 5 > 0$,
  $D_3 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 < 0$.
- La forma cuadrática es definida negativa.

Menores principales. $|A| = 0$

.

Proposición

Sea $Q(x) = xAx^t$ con A simétrica y supongamos que $D_n = 0$ y $D_1 \neq 0, D_2 \neq 0, \ldots, D_{n-1} \neq 0$. Entonces A es

1. semidefinida positiva si y sólo si $D_1, D_2, \ldots, D_{n-1} > 0$;
2. semidefinida negativa si y sólo si $D_1 < 0, D_2 > 0, \ldots, (-1)^{n-1} D_{n-1} > 0$;
3. e indefinida en otro caso.

- **Ejemplo:** Sea $Q(x, y) = x^2 + 4xy + 4y^2$. La matriz asociada es
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$
- $D_1 = 1 > 0$, $D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$.
- La forma cuadrática es semidefinida positiva.

Otros casos.

- Consideremos la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

  Observemos que $D_1 = 1$, $D_2 = D_3 = 0$. Nuestro método anterior no es aplicable.

- La forma cuadrática asociada es semidefinida positiva si y sólo si $a \geq 0$ e indefinida si $a < 0$.
- Si intercambiamos las variables y y z entonces la matriz asociada se convierte en

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

  ahora sí podemos aplicar la proposición anterior.

- Esto se formaliza de la siguiente manera.

Menores principales.

- Un menor principal de orden k es el determinante de la submatriz obtenida borrando **las mismas $n-k$ filas y columnas**.
- **Ejemplo:** Sea $A \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{13} \end{pmatrix}$.
- Los menores principales de tamaño 2×2 y los de 3×3 de la matriz son

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{obtenido borrando la fila y columna 1}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{obtenido borrando fila y columna 2}$$

y

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{obtenido borrando fila y columna 3}$$

Menores Principales.

$$A \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{13} \end{pmatrix}$$

- Los menores principales de tamaño 1×1 de A son a_{11} (obtenidos borrando filas y columnas 2 y 3), a_{22}(obtenidos borrando filas y columnas 1 y 3) y a_{33} (obtenido borrando filas y columnas 1 y 2).
- El único menor principal 3×3 de A es $|A|$.

Proposición

La proposición se mantiene cierta si reemplazamos la cadena de menores principales por otras cadenas consistentes en menores principales centrados.

Ejemplo.

Ejemplo

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tenemos $D_2 = D_3 = 0$. Consideremos la cadena de menores principales $|a_{33}|$, $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $|A|$: 1, $\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4$ y $|A| = 0$. Así pues, la forma cuadrática asociada es semidefinida positiva.

Nota.

- Los métodos explicados son especialmente útiles para matrices símétricas 2×2.
- Por ejemplo si A es una matriz 2×2 y $|A| < 0$, entonces la forma cuadrática asociada es indefinida.
- ¿Por qué?