Sesión 11
Matemáticas para la Economía II

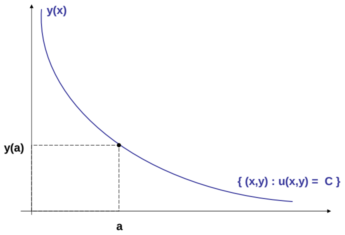
Derivación Parte VI: Aplicaciones del Teorema de la función Implícota. Aproximaciones de Taylor. Formas Cuadráticas

Grados en Administración de Empresas, Finanzas y Contabilidad, Empresa y Tecnología, Estudios Internacionales y Administración de Empresas y Derecho y Administración de Empresas

Universidad Carlos III de Madrid

Ejemplo: Curvas de Indiferencia.

- Dos bienes de consumo y un consumidor con una función de utilidad dierenciable $u(x, y)$.
- Las curvas de indiferencia de u son los conjuntos de nivel $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0, \quad u(x, y) = C\}$.
- Supongamos $\frac{\partial u}{\partial x} > 0$ $\frac{\partial u}{\partial y} > 0$.
- Por el Teorema de la función implícita, la ecuación $u(x, y) = C$ define una función de x.
- El conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0, \quad u(x, y) = C\}$ puede ser representado como la gráfica de la función $y(x)$.



Ejemplo: Curvas de Indiferencia.

- Derivando implícitamente,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} y'(x) = 0$$

- Así pues,

$$y'(x) = -\frac{\partial u / \partial x}{\partial u / \partial y}$$

- $y(x)$ es una función decreciente.
- La tasa de sustitución marginal es

$$\text{MRS}(x, y) = |y'(x)| = \frac{\partial u / \partial x}{\partial u / \partial y}(x, y)$$

- $\text{MRS}(x, y)$ mide (aproximadamente) la cantidad máxima del bien y que el agente estaría dispuesto a ofrecer para poder consumir una unidad adicional del bien x, partiendo de que la cesta actual del agente es (x, y).

MRS.

- Sea $u(x, y) = x^2 y^4$.
- La tasa de sustitución marginal es

$$\mathrm{MRS}(x, y) = \frac{\partial u / \partial x}{\partial u / \partial y} = \frac{2xy^4}{4x^2y^3} = \frac{y}{2x}$$

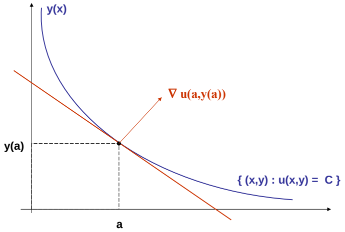
Ejemplo: Curvas de Indiferencia.

- La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y(x)$ en el punto $(a, y(a))$ es $y'(a)$
- Esto es, el vector director de la recta tangente a la gráfica de $y(x)$ en el punto $(a, y(a))$ es el vector $(1, y'(a))$.
- Y

$$(1, y'(a)) \cdot \nabla u(a, y(a)) = \left(1, -\frac{\partial u/\partial x}{\partial u/\partial y}\right) \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

Ejemplo: Curvas de Indiferencia.

- El vector gradiente ∇u es perpendicular a la recta tangente a la curva de indiferencia del consumidor.



Ejemplo: Función de demanda de un consumidor.

- Supongamos que hay dos bienes y un consumidor tiene unas preferencias representadas por la función de utilidad $u(x, y)$.
- Si los precios de los bienes son p_x y p_y, consumir la cesta (x, y) le cuesta al agente

$$p_x x + p_y y$$

- Si su renta es I entonces debe verificarse que

$$p_x x + p_y y = I$$

- Esto equivale a decir que si el agente compra x unidades del primer bien, entonces puede consumir como mucho

$$\frac{I}{p_y} - \frac{p_x}{p_y} x$$

Ejemplo: Función de demanda de un consumidor.

- Y su utilidad sería

$$u\left(x, \frac{I}{p_y} - \frac{p_x}{p_y}x\right) \tag{0.1}$$

- En Teoría Económica se supone que el agente elige la cesta de bienes (x, y) que le proporciona una utilidad mayor.
- Es decir, el agente maximiza la función $u\left(x, \frac{I}{p_y} - \frac{p_x}{p_y}x\right)$
- Derivando implícitamente respecto a x obtenemos que

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{p_x}{p_y} = 0 \tag{0.2}$$

Ejemplo: Función de demanda de un consumidor.

- Es decir, la condición de primer orden es

$$\mathrm{MRS}(x, y) = \frac{p_x}{p_y}$$

esta ecuación junto con la restricción presupuestaria

- $$p_x x + p_y y = I$$

determina la demanda del agente.

Ejemplo: Función de demanda de un consumidor.

- Por ejemplo, si las preferencias del agente se pueden representar por una función de utilidad Cobb-Douglas

$$u(x, y) = x^2 y$$

- la MRS es

$$\mathrm{MRS}(x, y) = \frac{2xy}{x^2} = \frac{2y}{x}$$

y la demanda del agente está determinada por el sistema

$$\begin{aligned} \frac{2y}{x} &= \frac{p_x}{p_y} \\ p_x x + p_y y &= I \end{aligned}$$

- obtenemos las funciones de demanda del agente

$$\begin{aligned} x(p_x, p_y, I) &= \frac{2I}{3p_x} \\ y(p_x, p_y, I) &= \frac{I}{3p_y} \end{aligned}$$

Isocuantas y la relación marginal de sustitución técnica.

- Supongamos que una empresa utiliza la función de producción $Y = f(x_1, x_2)$ donde (x_1, x_2) son las unidades de factores utilizadas en la elaboración de Y unidades del producto.
- Dado un nivel de producción $\bar{y}$ fijo, la isocuanta correspondiente es el conjunto de nivel

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 > 0, \quad f(x_1, x_2) = \bar{y}\}$$

- De manera análoga al ejercicio anterior, vemos que sobre la isocuanta podemos escribir x_2 como una función de x_1 y que

$$x_2'(x_1) = -\frac{\partial f / \partial x_1}{\partial f / \partial x_2}$$

- La relación marginal de sustitución técnica se define como

$$\mathrm{RMST} = -x_2'(x_1) = \frac{\partial f / \partial x_1}{\partial f / \partial x_2}$$

Isocuantas y la relación marginal de sustitución técnica.

- Por ejemplo, si la función de producción de la empresa es $Y = x_1^{1/3} x_2^{1/2}$ entonces la relación marginal de sustitución técnica es

$$\mathrm{RMST} = \frac{\partial Y / \partial x_1}{\partial Y / \partial x_2} = \frac{\frac{1}{3} x_1^{-2/3} x_2^{1/2}}{\frac{1}{2} x_1^{1/3} x_2^{-1/2}} = \frac{2x_2}{3x_1}$$

Polinomio de Taylor de primer orden.

- Sea $f \in C^1(D)$, $p \in D$. El polinomio de Taylor de primer orden en el punto p es
$$P_1(x) = f(p) + \nabla f(p) \cdot (x - p)$$
- Si $f(x, y)$ es una función de dos variables y $p = (a, b)$, entonces el polinomio de Taylor de primer orden para la función f alrededor del punto $p = (a, b)$ es el polinomio
$$P_1(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot (x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot (y - b)$$
- $\lim_{x \to p} \frac{f(x) - P_1(x)}{\|x - p\|} = 0.$

Polinomio de Taylor de segundo orden.

- Sea $f \in C^2(D)$, $p \in D$. El polinomio de Taylor de segundo orden en el punto p es

$$P_2(x) = f(p) + \nabla f(p) \cdot (x - p) + \frac{1}{2}(x - p)\,\mathrm{H}\, f(p)(x - p)$$

- Si $f(x, y)$ es una función de dos variables y $p = (a, b)$, entonces el polinomio de Taylor de orden dos de la función f alrededor del punto $p = (a, b)$ es el polinomio

$$P_2(x, y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) +$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x - a)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x - a)(y - b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(y - b)^2\right)$$

- $\lim_{x \to p} \frac{f(x) - P_2(x)}{\|x - p\|^2} = 0.$

Ejemplo.

- Sea $f(x,y) = x^3y - xy + 2x + 2y^2 - 15y + 1$ y $p = (-1,1)$.
- Calculamos el gradiente y la matriz Hessiana para la función f en el punto p.
- Tenemos

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= \left(3x^2y - y + 2, x^3 - x + 4y - 15\right) \\ \mathrm{H}\, f(x,y) &= \begin{pmatrix} 6xy & 3x^2-1 \\ 3x^2-1 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- Por tanto,

$$\begin{aligned} \nabla f(-1,1) &= (4,-11) \\ \mathrm{H}\, f(-1,1) &= \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejemplo.

- El polinomio de Taylor de primer orden de la función f en el punto p es

$$P_1(x,y) = f(-1,1) + \nabla f(p)\cdot(x+1, y-1) = -14 + (4,-11)\cdot(x+1,y-1)$$
$$= -14 + 4(1+x) - 11(-1+y)$$

- El polinomio de Taylor de segundo orden de la función f en el punto p es

$$\begin{aligned} P_2(x,y) &= f(-1,1) + \nabla f(p)\cdot(x+1,y-1) + \\ &\quad \frac{1}{2}(x+1,y-1)\,\mathrm{H}\,f(-1,1)\begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \end{pmatrix} = \\ &= -14 + (4,-11)\cdot(x+1,y-1) + \\ &\quad \frac{1}{2}\left(-6(x+1)^2 + 4(x+1)(y-1) + 4(y-1)^2\right) \\ &= -3x^2 + 2xy - 4x + 2y^2 - 13y - 2 \end{aligned}$$