Sesión 1
Matemáticas para la Economía I

El espacio Euclídeo.

Grados en Economía, Estudios Internacionales–Economía y Derecho–Economía

Universidad Carlos III de Madrid

Producto escalar en $\mathbb{R}^n$.

- Dados $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, definimos su **producto escalar** como $x \cdot y = \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.
- Por ejemplo, $(2,1,3) \cdot (-1,0,2) = -2 + 6 = 4$.
- **norma**: $\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$, donde $x = (x_1, \cdots, x_n)$.
- **Ejemplo**: $\|(-1,0,3)\| = \sqrt{10}$
- $\|x\|$ es la distancia desde x al origen. Es también la longitud del vector x.
- $\|x - y\|$ es la distancia entre x e y.
- El ángulo entre u y v es $\cos\theta = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}$.
- **Ejemplo**: $u = (a,a)$, $v = (0,1)$. El ángulo entre u y v es $\pi/4$ (dibujo). Se tiene también que $\|u\| = \sqrt{2}|a|$. $\|v\| = 1$, $u \cdot v = a$. Es decir,

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Bolas abiertas y cerradas.

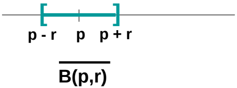
Sea $p \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$.

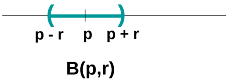
- La **bola abierta** de centro p y radio r es $B(p, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|p - y\| < r\}$.
- La **bola cerrada** de centro p y radio r es $\overline{B(p, r)} = \{y \in \mathbb{R}^n : \|p - y\| \leq r\}$.
- Para $n = 1$, tenemos que

$$B(p, r) = (p - r, p + r)$$

y

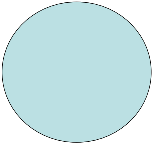
$$\overline{B(p, r)} = [p - r, p + r]$$



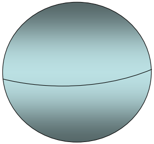


Bolas abiertas y cerradas.

- Para $n = 2, 3$ las bolas cerradas son

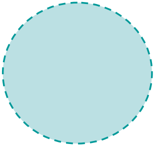


n = 2

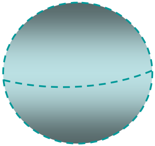


n = 3

- Para $n = 2, 3$ las bolas abiertas son



n = 2

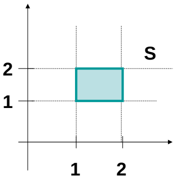


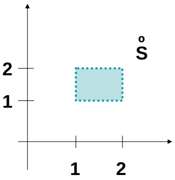
n = 3

Interior de un conjunto.

Sea $S \subset \mathbb{R}^n$.

- $p \in \mathbb{R}^n$ está en el **interior** de S (y se escribe $p \in \overset{\circ}{S}$) si existe algún $r > 0$ tal que $B(p, r) \subset S$.
- $\overset{\circ}{S} \subset S$
- Sea $S = [1, 2] \times [1, 2] \subset \mathbb{R}^2$. Entonces, $\overset{\circ}{S} = (1, 2) \times (1, 2)$.

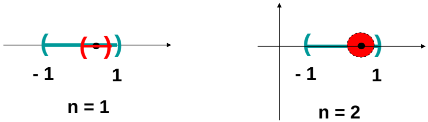




- $S = [-1, 1] \cup \{3\} \subset \mathbb{R}$. Entones, $\overset{\circ}{S} = (-1, 1)$.

Conjuntos abiertos

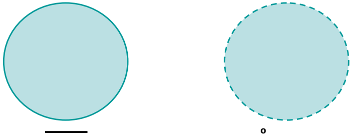
- Un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es **abierto** si $S = \mathring{S}$
- La bola abierta $B(p, r)$ es un conjunto abierto.
- $S = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$ es abierto, $T = (-1, 1] \subset \mathbb{R}$ no lo es.
- Pero $S = \{(x, 0) : -1 < x < 1\}$ no es abierto en $\mathbb{R}^2$.



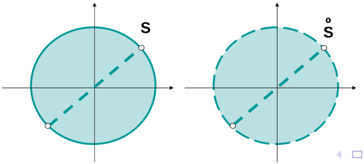
- $\mathring{S}$ es el conjunto abierto más grande contenido en S. (Esto es, $\mathring{S}$ es abierto, $\mathring{S} \subset S$ y si $A \subset S$ es abierto, entonces $A \subset \mathring{S}$).

Ejemplos.

- La bola cerrada $\overline{B(p,r)}$ no es un conjunto abierto, porque $\overset{\circ}{\overline{B(p,r)}} = B(p,r)$.



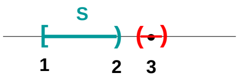
- $S = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \neq y\}$ no es abierto porque $\overset{\circ}{S} = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 < 1, x \neq y\}$.



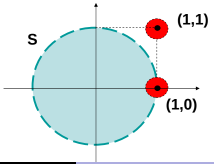
Clausura o adherencia

Let $S \subset \mathbb{R}^n$.

- $p \in \mathbb{R}^n$ está en la **clausura** de S (y escribimos $p \in \bar{S}$) si para todo $r > 0$ tenemos que $B(p,r) \cap S \neq \emptyset$.
- $S = [1,2) \subset \mathbb{R}$. Entonces, $1, 2 \in \bar{S}$. Pero, $3 \notin \bar{S}$.



- $S = B\left((0,0),1\right) \subset \mathbb{R}^2$. Entonces, el punto $(1,0) \in \bar{S}$. Pero, $(1,1) \notin \bar{S}$.



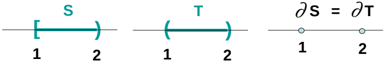
Conjuntos cerrados

- $F \subset \mathbb{R}^n$ es **cerrado** si $F = \bar{F}$.
- $[1,2] \subset \mathbb{R}$ es cerrado. Pero, el conjunto $[1,2) \subset \mathbb{R}$ no lo es.
- $\overline{B(p,r)}$ es cerrado. Pero, el conjunto $B(p,r)$ no lo es.
- $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \neq y\}$ no es cerrado.
- La clausura $\bar{S}$ de S es el menor conjunto cerrado que contiene a S. (Esto es, $\bar{S}$ es cerrado, $S \subset \bar{S}$ y si F es otro conjunto cerrado que contiene a S, entonces $\bar{S} \subset F$).

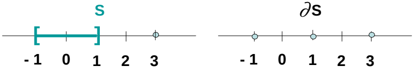
Frontera.

Sea $S \subset \mathbb{R}^n$.

- $p \in \mathbb{R}^n$ es un **punto frontera** de S si para todo radio positivo $r > 0$, tenemos que,
  1. $B(p,r) \cap S \neq \emptyset$.
  2. $B(p,r) \cap (\mathbb{R}^n \setminus S) \neq \emptyset$.
- $\partial S =$ es el conjunto de los puntos frontera de S .
- $S = [1,2),\ T = (1,2)$. Entonces, $\partial S = \partial T = \{1,2\}$.

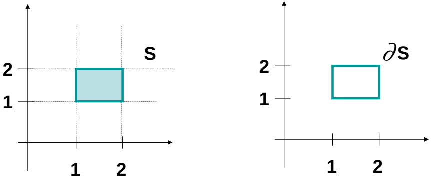


- $S = [-1,1] \cup \{3\} \subset \mathbb{R}$. Entonces, $\partial S = \{-1,1,3\}$.

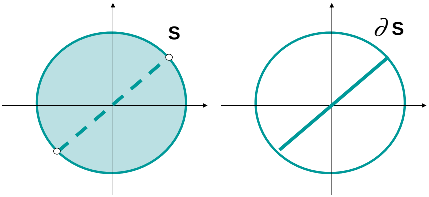


Ejemplos.

- $S \subset \mathbb{R}^2, S = [1,2] \times [1,2]$. Entonces, ∂S es



- $S = \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \neq y\}$. Entonces, $\partial S = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\} \bigcup \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x = y\}$.



Notas útiles

Sea $S \subset \mathbb{R}^n$, entonces

- $\overset{\circ}{S} = S \setminus \partial S$
- $\bar{S} = S \cup \partial S$
- $\partial S = \overline{S} \cap \overline{\mathbb{R}^n \setminus S}$.

- Esto es, conociendo $\bar{S}$ es fácil calcular $\overset{\circ}{S}$ y $\bar{S}$.

Conjuntos acotados.

- Un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es **acotado** si existe algún $R > 0$ tal que $S \subset B(0, R)$.
- Dibujemos algunos ejemplos.
- Un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es **compacto** si S es cerrado y acotado. $S = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \neq y\}$ no es compato (es acotado, pero no cerrado).
- $B(p, R)$ no es compacto (es acotado, pero no cerrado).
- $\overline{B(p, R)}$ es compacto.
- $(0, 1]$ no es compacto. $[0, 1]$ es compacto.
- $[0, 1] \times [0, 1]$ es compacto.

Conjuntos convexos.

- Un suconjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es **convexo** si para todo $x, y \in S$ y $\lambda \in [0, 1]$ tenemos que $\lambda \cdot x + (1 - \lambda) \cdot y \in S$.
- Dibujamos algunos ejemplos.
- $\{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \neq y\}$ no es un conjunto convexo.