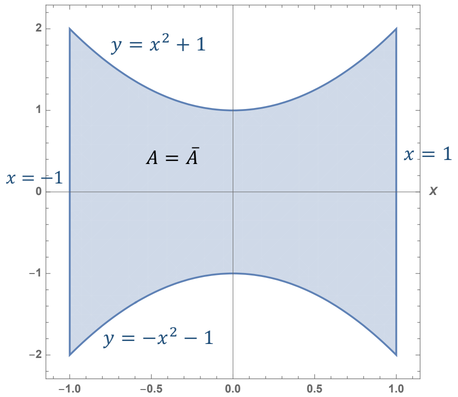
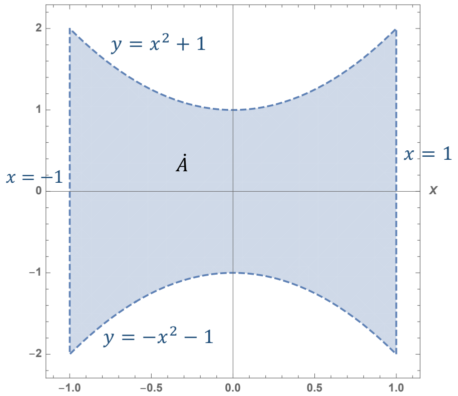
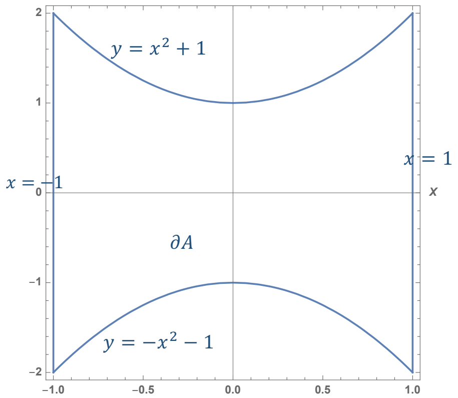
(1) Considere el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq x^2 + 1, |x| \leq 1\}$.

(a) Dibuje el conjunto A, su interior y su frontera. Justifique si el conjunto A es abierto, cerrado, acotado, compacto y/o convexo.

Solución: *El conjunto A, su interior y su frontera se representan:*



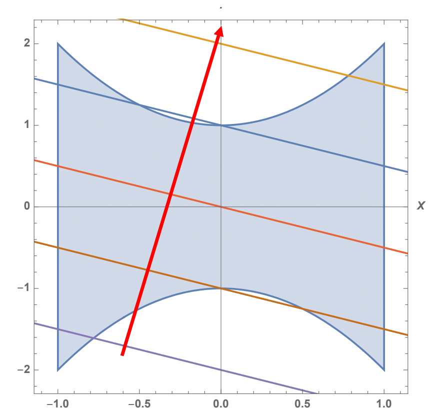




Como el conjunto A contiene su frontera, es cerrado. Al no coincidir con su interior sabemos que no es abierto. Gráficamente, observamos que el conjunto A es acotado pero no es un conjunto convexo. El conjunto A es compacto.

(b) Enuncie el teorema de Weierstrass. Determine si es posible aplicar el teorema de Weierstrass a la función $f(x, y) = 2y + x$ definida en A. Dibuje las curvas de nivel de $f(x, y) = 2y + x$ y la dirección de crecimiento de las curvas de nivel.

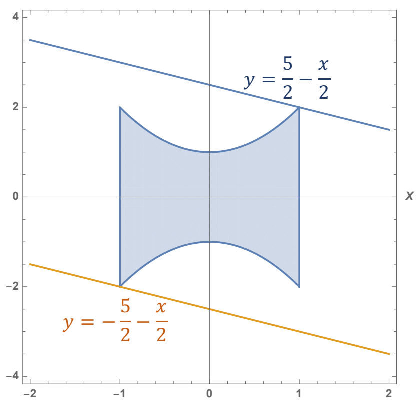
Solución: *La función $f(x, y) = 2y + x$ es continua en $\mathbb{R}^2$ y por lo tanto también lo es en el subconjunto $A \subset \mathbb{R}^2$. Además, el conjunto A es un conjunto compacto de puntos por lo cual sabemos que se cumple el teorema de Weierstrass.*
Las curvas de nivel de la función f vienen dadas por la ecuación $2y + x = C$ o $y = \frac{C}{2} - \frac{x}{2}$, $C \in \mathbb{R}$. Gráficamente,



La flecha roja apunta en la dirección de crecimiento de la función.

(c) Utilizando las curvas de nivel anteriores de f, determine si esta función alcanza un valor maximo y/o mínimo en el conjunto A. En caso afirmativo, calcule los puntos donde la función f alcanza los valores extremos en el conjunto A.

Solución: *Gráficamente observamos que el mínimo valor de la función f se alcanza en el punto* $(-1, -2)$. *De igual forma vemos que su valor máximo se obtiene en el punto* $(1, 2)$.



(2) Considere la función $f(x,y,z) = 8x^2 + 4xz + 8x + y^4 + 32y + z^2 + 16$ definida en $\mathbb{R}^3$.

(a) Calcule el gradiente de la función f y la matriz Hessiana de f. Calcule $D_v f(-1,0,1)$ para $v = (2,1,-1)$

Solución: *Calculamos,*

$$\nabla f(x,y,z) = \left(16x + 4z + 8, 4y^3 + 32, 4x + 2z\right), \quad \mathrm{H}(f)(x,y,z) = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 4 \\ 0 & 12y^2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Como, $\nabla f(-1,0,1) = (-4,32,-2)$*, se obtiene* $D_v f(-1,0,1) = (-4,32,-2)\cdot(2,1,-1) = 26$.

(b) Encuentre el polinomio de Taylor de orden 2 de la función f en el punto $p = (-1,1,3)$.

Solución: *Evaluando los elementos anteriores en el punto dado,*

$$f(-1,1,3) = 46, \quad \nabla f(-1,1,3) = (4,36,2), \quad \mathrm{H}(f)(-1,1,3) = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 4 \\ 0 & 12 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

obtenemos que el polinomio de Taylor de segundo orden en el punto $(-1,1,3)$ *será*

$$\begin{aligned} P_2(x,y,z) &= 46 + 4(x+1) + 36(y-1) + 2(z-3) + \frac{1}{2}\left(16(x+1)^2 + 12(y-1)^2 + 2(z-3)^2 + 8(x+1)(z-3)\right) \\ &= 8x^2 + 4xz + 8x + 6y^2 + 24y + z^2 + 19 \end{aligned}$$

.

(3) Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 8xz + z^4 &= 1 \\ y^2 z - x^3 &= 225 \end{aligned}$$

(a) Utilizando el teorema de la función implícita, demuestre que el sistema de ecuaciones anterior define dos funciones diferenciables $y(x)$ y $z(x)$ cerca del punto $(x_0, y_0, z_0) = (0, 15, 1)$.

Solución: *Primero comprobamos que el punto dado $(x_0, y_0, z_0) = (0, 15, 1)$ es una solución del sistema de ecuaciones. Sabemos que las funciones $f_1(x, y, z) = 8xz + z^4 - 1$ y $f_2(x, y, z) = y^2 z - x^3 - 225$ son de clase C^∞ al ser polinomios. Calculamos el siguiente determinante que nos tiene que dar distinto de 0,*

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{vmatrix}_{(x,y,z)=(0,15,1)} = \begin{vmatrix} 0 & 4z^3 + 8x \\ 2yz & y^2 \end{vmatrix}_{(x,y,z)=(0,15,1)} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 30 & 225 \end{vmatrix} = -120$$

Por el teorema de la función implícita, sabemos que el sistema de ecuaciones anterior determina implícitamente dos funciones diferenciables $y(x)$ y $z(x)$ en un entorno del punto $(x, y, z) = (0, 15, 1)$.

(b) Calcule

$$y'(0), z'(0)$$

y los polinomios de Taylor de orden 1 de $y(x)$ y $z(x)$ en el punto $x_0 = 0$.

Solución: *Derivando el sistema implícitamente con respecto de la variable x,*

$$\begin{aligned} 8xz' + 8z + 4z^3 z' &= 0 \\ 2yy'z + y^2 z' - 3x^2 &= 0 \end{aligned}$$

Evaluanado en el punto $(x, y, z) = (0, 15, 1)$ obtenemos la siguiente expresión,

$$\begin{aligned} 4z' + 8 &= 0 \\ 30y' + 225z' &= 0 \end{aligned}$$

Así,

$$y'(0) = 15, \quad z'(0) = -2$$

Por lo tanto, el polinomio de Taylor de primer orden para la función $y(x)$ en el punto $x_0 = 0$ es

$$P_1 = 15x + 15$$

, y el polinomio de Taylor de primer orden para la función $z(x)$ en el punto $x_0 = 0$ es

$$Q_1 = 1 - 2x$$

.

(4) Considere la función $f(x,y,z) = ax^2 + dxy + dxz + y^2 + z^2$ en $\mathbb{R}^2$, con $a, d \in \mathbb{R}$.

(a) Determine si la función f es estrictamente cóncava o convexa en $\mathbb{R}^3$, según los valores de los parámetros $a, d \in \mathbb{R}$.

Solución:
La matriz Hessiana de f es

$$\mathrm{H}(f)(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2a & d & d \\ d & 2 & 0 \\ d & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Los menores principales son

$$\begin{aligned} D_1 &= 2a \\ D_2 &= 4a - d^2 \\ D_3 &= 8a - 4d^2 = 4(2a - d^2) \end{aligned}$$

- *Supongamos primero que $a > 0$. Entonces, $D_1 > 0$. La función no puede ser cóncava. La función f es estrictamente convexa si cumple $4a - d^2 > 0$ y $2a - d^2 > 0$. Por lo tanto, si $a > 0$ y $d^2 < 2a$ (ó $|d| < \sqrt{2a}$), la función f es estrictamente convexa.*
  Si $d^2 = 2a$ entonces $D_2 = 2a > 0$ y $D_3 = 0$. De esta forma la función es convexa pero no estrictamente convexa.
  Si $d^2 > 2a$ entonces $D_3 = 4(2a - d^2) < 0$ y la función no sería cóncava ni convexa.
- *Si suponemos, $a = 0$. Se obtiene $f = dxy + dxz + y^2 + z^2$ con matriz hessiana*

$$\mathrm{H}(f)(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & d & d \\ d & 2 & 0 \\ d & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

  Por lo tanto, $D_2 = -d^2$ y $D_3 = -4d^2$, si $d \neq 0$ la función f no sería cóncava ni convexa. Si $a = d = 0$, entonces $f(x,y,z) = y^2 + z^2$ siendo función convexa, pero no estrictamente convexa.
- *Por último, si tenemos $a < 0$. Entonces $D_1 < 0$ y $D_2 = 4a - d^2 < 0$. Luego, la función f no es cóncava ni convexa.*

(b) Utilizando los resultados del apartado anterior, determine si el conjunto $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 8x^2 - 2xy - 2xz + y^2 + z^2 \leq 2\}$ es convexo.

Solución: *Definimos la función $g(z,y,x) = 8x^2 - 2xy - 2xz + y^2 + z^2$. Esta función se obtienen de la función anterior $f(x,y,z) = ax^2 + dxy + dxz + y^2 + z^2$ tomando valores en los parámetros $a = 8$, $d = -2$. Por el apartado anterior, sabemos que la función g es estrictamente convexa. Y por lo tanto, el conjunto de puntos $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(z,y,x) \leq 2\}$ de subnivel, es un conjunto convexo.*

(5) Sea $f(x,y,z) = x^4 z + y^3$, $g(u,v) = (u^2, u - v^3, u - v)$ y $h(u,v) = f(g(u,v))$. Utilizando la regla de la cadena calcule

$$\frac{\partial h}{\partial u}(1,1), \quad \frac{\partial h}{\partial v}(1,1)$$

Solución: *Calculamos las derivadas de primer orden de las funciones que intervienen*

$$Dg(u,v) = \begin{pmatrix} 2u & 0 \\ 1 & -3v^2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Evaluando en el punto,

$$Dg(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Por otro lado, $Df(x,y,z) = \left(4x^3 z, 3y^2, x^4\right)$ *y como* $g(1,1) = (1,0,0)$. *Obtenemos* $Df(1,0,0) = (0,0,1)$
Por lo tanto,

$$Dh(1,1) = (0,0,1) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (1,-1)$$

Y de esta manera las soluciones pedidas son,

$$\frac{\partial h}{\partial u}(1,1) = 1, \quad \frac{\partial h}{\partial v}(1,1) = -1$$