Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía

Examen final de Matemáticas para la Economía I. 1 de Julio de 2021.

(1) Considere el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq x^2 + 1, |x| \leq 1\}$.

(a) (**1 punto**) Dibuje el conjunto A, su interior y su frontera. Justifique si el conjunto A es abierto, cerrado, acotado, compacto y/o convexo.

(b) (**1 punto**) Enuncie el teorema de Weierstrass. Determine si es posible aplicar el teorema de Weierstrass a la función $f(x, y) = 2y + x$ definida en A. Dibuje las curvas de nivel de $f(x, y) = 2y + x$ y la dirección de crecimiento de las curvas de nivel.

(c) (**1 punto**) Utilizando las anteriores curvas de nivel de f, determine si esta función alcanza un valor maximo y/o mínimo en el conjunto A. En caso afirmativo, calcule los puntos donde la función f alcanza los valores extremos en el conjunto A.

(2) Considere la función $f(x, y, z) = 8x^2 + 4xz + 8x + y^4 + 32y + z^2 + 16$ definida en $\mathbb{R}^3$.

(a) (**1 punto**) Calcule el gradiente de la función f y la matriz Hessiana de f. Calcule $D_v f(-1, 0, 1)$ para v=(2, 1, -1)

(b) (**1 punto**) Encuentre el polinomio de Taylor de orden 2 de la función f en el punto $p = (-1, 1, 3)$.

(3) Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 8xz + z^4 &= 1 \\ y^2 z - x^3 &= 225 \end{aligned}$$

(a) (**1 punto**) Utilizando el teorema de la función implicíta, demuestre que el sistema de ecuaciones anterior define dos funciones diferenciables $y(x)$ y $z(x)$ cerca del punto $(x_0, y_0, z_0) = (0, 15, 1)$.

(b) (**1 punto**) Calcule

$$y'(0), z'(0)$$

y los polinomios de Taylor de orden 1 de $y(x)$ y $z(x)$ en el punto $x_0 = 0$.

(4) Considere la función $f(x, y, z) = ax^2 + dxy + dxz + y^2 + z^2$ en $\mathbb{R}^2$, con $a, d \in \mathbb{R}$.

(a) (**1 punto**) Determine si la función f es estrictamente cóncava o convexa en $\mathbb{R}^3$, según los valores de los parámetros $a, d \in \mathbb{R}$.

(b) (**1 punto**) Utilizando los resultados del apartado anterior, determine si el conjunto $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 8x^2 - 2xy - 2xz + y^2 + z^2 \leq 2\}$ es convexo.

(5) (**1 punto**) Sea $f(x, y, z) = x^4 z + y^3$, $g(u, v) = (u^2, u - v^3, u - v)$ y $h(u, v) = f(g(u, v))$. Utilizando la regla de la cadena calcule

$$\frac{\partial h}{\partial u}(1, 1), \quad \frac{\partial h}{\partial v}(1, 1)$$