Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía

Examen final de Matemáticas I. 21 de Enero de 2022.

Apellidos:		**Nombre:**
DNI:	**Titulación:**	**Grupo:**

IMPORTANTE

- **DURACIÓN DEL EXAMEN: 2h**
- **NO** se permite el uso de calculadoras.
- **Sólo se entregará este cuadernillo.** Las respuestas deben escribirse en este cuadernillo ya que sólo se puntuará lo que haya en él. Por favor, compruebe que hay 10 páginas en el cuadernillo.
- **NO DESGRAPE LAS HOJAS DEL EXAMEN.**
- Es imprescindible identificarse ante el profesor.
- Hay espacio adicional para operaciones al final del examen y detrás de esta página.

Problema	Puntuación
1	
2	
3	
4	
5	
Total	

Universidad Carlos III de Madrid

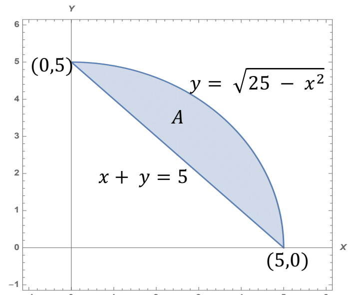
Departamento de Economía

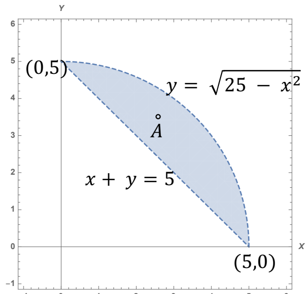
Examen final de Matemáticas para la Economía I. 21 de Enero de 2022.

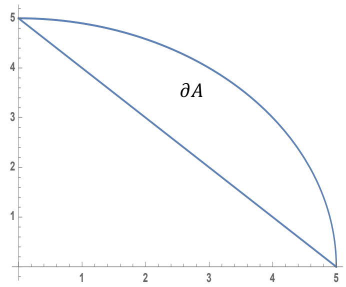
(1) Considere el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 25, x + y \geq 5\}$.

(a) (**4 puntos**) Dibuje el conjunto A, su interior y su frontera. Justifique si el conjunto A es abierto, cerrado, acotado, compacto y/o convexo.

Solución: *El conjunto A, su interior y su frontera son*





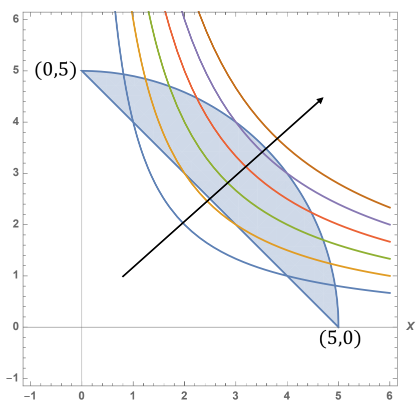


Como el conjunto A contiene a su frontera, es cerrado. No coincide con su interior. Por lo tanto, no es abierto. Gráficamente, vemos que el conjunto A es acotado y convexo. el conjunto A es compacto.

(b) (**3 puntos**) Enuncie el teorema de Weierstrass. Determine si es posible aplicar el teorema de Weierstrass a la función $f(x, y) = xy$ definida en A. Dibuje las curvas de nivel de $f(x, y) = xy$ definida en $\mathbb{R}^2_+$ y la dirección de crecimiento de las curvas de nivel.

Solución: *La función $f(x, y) = xy$ es continua en $\mathbb{R}^2$. Por lo tanto, es continua en $A \subset \mathbb{R}^2$. Además, el conjunto A es compacto. Se verifican las hipótesis del teorema de Weierstrass.*

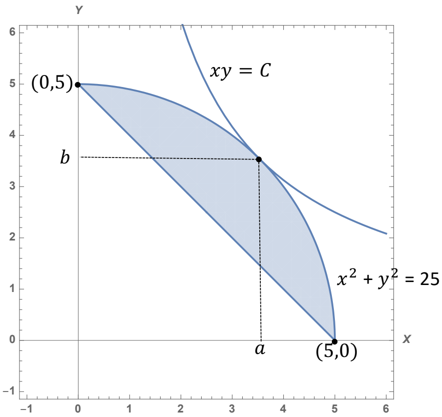
Las curvas de nivel de la función f están determinadas por la ecuación $xy = C$. Para $C \neq 0$, obtenemos $y = \frac{C}{x}$. Para $C = 0$, obtenemos los ejes de coordenadas. Gráficamente, para $x, y > 0$,



La flecha apunta en la dirección de crecimiento de C.

(c) (**3 puntos**) Utilizando las anteriores curvas de nivel de f, determine si esta función alcanza un valor maximo y/o mínimo en el conjunto A. En caso afirmativo, calcule los puntos donde la función f alcanza los valores extremos en el conjunto A.

Solución: *En el conjunto A tenemos $f(x,y) \geq 0$ y $f(5,0) = f(0,5) = 0$. El mínimo global se alcanza en los puntos $(5,0)$ y $(0,5)$. Gráficamente,*



El valor máximo en A se alcanza en el punto (a,b) en el que las curva $xy = C$ y la curva dada por la ecuación $x^2 + y^2 = 25$ son tangentes. Sea $y_1(x)$ la función definida al despejar y en la ecuación $yx = C$. Y sea $y_2(x)$ la función definida al despejar y en la ecuación $x^2 + y^2 = 25$. Tenemos que

$$y_1'(a) = y_2'(a)$$

Por otro lado, derivando implícitamente las ecuaciones anteriores obtenemnos que

$$y_1 + xy_1' = 0, \quad y \quad 2x + 2y_2y_2' = 0$$

Sustituimos los valores $x = a$, $y_1(a) = y_2(a) = b$ y $m = y_1'(a) = y_2'(a)$ y obtenemos

$$b + am = 0, \quad and \quad a + bm = 0$$

ó $a = -bm = -b^2/a$. Por lo tanto, $a^2 = b^2$. Puesto que $a, b \geq 0$, tenemos que $a = b$. Y de la ecuación $a^2 + b^2 = 25$ obtenemos

$$a = b = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

(2) Considere la función $f(x,y,z) = 4ax^2 + 4ay^2 + 5xy + 4xz + 2z^2$ definida en $\mathbb{R}^3$, con $a \in \mathbb{R}$.

(a) (**6 puntos**) Determine para qué valores de a la función es estrictamente convexa. Determine para qué valores de a la función es estrictamente cóncava.

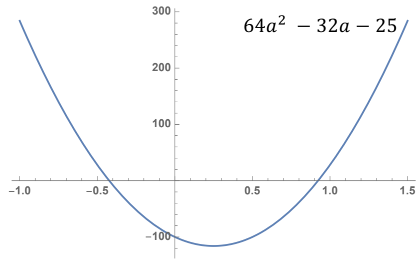
Solución: *Tenemos que*

$$\nabla(x,y,z) = (8ax + 5y + 4z, 5x + 8ay, 4x + 4z)\,, \quad \mathrm{H}(f)(x,y,z) = \begin{pmatrix} 8a & 5 & 4 \\ 5 & 8a & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Consideramos $D_1 = 4$, $D_2 = 32a$, $D_3 = |A| = 4\left(64a^2 - 32a - 25\right)$. *Las raíces de* $64a^2 - 32a - 25 = 0$ *son*

$$a = \frac{32 \pm \sqrt{32^2 + 100 \times 64}}{2 \times 64} = \frac{2 \pm \sqrt{29}}{8}$$

Vemos que $64a^2 - 32a - 25$ *representa una parábola cuyas ramas apuntan hacia arriba e intersecta al eje* X *en los puntos* $a_1 = \frac{2-\sqrt{29}}{8} < 0$ *y* $a_2 = \frac{2+\sqrt{29}}{8} > 0$.



(i) *Vemos que* $D_1 > 0$. *Y* $D_2 > 0$ *si y sólo si* $a > 0$. *Entonces* $D_3 > 0$ *si y sólo si* $a > \frac{2+\sqrt{29}}{8}$. *Concluimos que* $D_1, D_2, D_3 > 0$ *si y sólo si* $a > \frac{2+\sqrt{29}}{8}$. *Por lo tanto,* f *es estrictamente convexa si* $a > \frac{2+\sqrt{29}}{8}$.

(ii) *Como* $D_1 > 0$, *la función no puede ser cóncava.*

(b) (**4 puntos**) Aplique los resultados anteriores para determinar si el conjunto $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + 5xy + 4xz + 4y^2 + 2z^2 \leq 5\}$ es convexo.

Solución:
Tomando $a = 1 > \frac{2+\sqrt{29}}{8}$ *obtenemos* $f(x,y,z) = ax^2 + 4y^2 + 5xy + 4xz + 2z^2$. *El conjunto* $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f(x,y,z) \leq 5\}$ *es convexo, ya que* f *es una función convexa.*

(3) Considere el conjunto de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} xy^2 - yz^2 + yz & = & 1 \\ xe^{2z} - y^2 z & = & 1 \end{array}\right\}$$

(a) (**4 puntos**) Demuestre que el anterior sistema de ecuaciones determina implícitamente dos funciones diferenciables $y(x)$ y $z(x)$ en un entorno del punto $(x, y, z) = (1, -1, 0)$.

Solución: *Primero comprobamos que $(x, y, z) = (1, -1, 0)$ es una solución del sistema de ecuaciones. Las funciones $f_1(x, y, z) = xy^2 - yz^2 + yz - 1$ y $f_2(x, y, z) = xe^{2z} - y^2 z - 1$ al ser polinómicas y exponenciales son de clase C^∞. Calculamos el valor de*

$$\begin{aligned} \left|\begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{array}\right|_{(x,y,z)=(1,-1,0)} &= \left|\begin{array}{cc} 2xy - z^2 + z & -2yz + y \\ -2yz & 2xe^{2z} - y^2 \end{array}\right|_{(x,y,z)=(1,-1,0)} \\ &= \left|\begin{array}{cc} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{array}\right| = -2 \neq 0 \end{aligned}$$

Por el teorema de la función implícita sabemos que el sistema de ecuaciones dado nos determina de forma implícita dos funciones diferenciables $y(x)$ y $z(x)$ en un entorno del punto solución $(x, y, z) = (1, -1, 0)$.

(b) (**6 puntos**) Calcule

$$y'(1), z'(1)$$

y el polinomio de Taylor de orden uno de la función $y(x)$ en el punto $x_0 = 1$. Encuentre un valor aproximado de $y(0.95)$ utilizando dicho polinomio.

Solución: *Derivando implícitamente con respecto a la variable x,*

$$\begin{array}{rcl} y^2 + 2xyy' - y'z^2 - 2yzz' + y'z + yz' & = & 0 \\ e^{2z} + 2xz'e^{2z} - 2yy'z - y^2 z' & = & 0 \end{array}$$

Sustituyendo en el sistema las coordenadas del punto $(x, y, z) = (1, -1, 0)$ obtenemos

$$\begin{array}{rcl} 1 - 2y'(1) - 0 - 0 + 0 - z'(1) & = & 0 \\ 1 + 2z'(1) - z'(1) & = & 0 \end{array}$$

Así,

$$z'(1) = -1, \quad y'(1) = 1$$

Por lo tanto, el polinomio de Taylor de primer orden de la función $y(x)$ en el punto $x_0 = 1$ es

$$P_1(x) = y(1) + y'(1)(x - 1) = -1 + 1(x - 1) = x - 2$$

Si lo utilizamos para dar un valor aproximado de la función: $y(0.95) \approx P_1(0.95) = 0.95 - 2 = -1.05$

(4) Considere la función $f(x,y) = 2x^2y - xy + 2x - 2y^2 - 15y + 1$, el punto $p = (1,2)$ y el vector $v = (-1,3)$.

(a) (**5 puntos**) Calcule el gradiente y la matriz Hessiana de la función f en el punto p. Calcule $D_v f(p)$.

Solución: *Tenemos que*

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) &= \big(4xy - y + 2, 2x^2 - x - 4y - 15\big) \\ \mathrm{H}\, f(x,y) &= \begin{pmatrix} 4y & 4x-1 \\ 4x-1 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} \nabla f(1,2) &= (8,-22) \\ \mathrm{H}\, f(1,2) &= \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y

$$D_v f(p) = v \cdot \nabla f(p) = v = (-1,3) \cdot (8,-22) = -74$$

(b) (**5 puntos**) Calcule el plano tangente a la gráfica de la función f en el punto $(p, f(p))$. Calcule el polinomio de Taylor de segundo orden de la función f en el punto p.

Solución:
La ecuación del plano tangente es

$$\begin{aligned} z &= f(1,2) + \nabla f(p) \cdot (x-1, y-2) = -33 + (8,-22) \cdot (x-1, y-2) = \\ &= -33 + 8(-1+x) - 22(-2+y) \end{aligned}$$

El polinomio de Taylor de segundo orden de la función f en el punto p es

$$\begin{aligned} P_2(x,y) &= f(1,2) + \nabla f(p) \cdot (x-1, y-2) + \frac{1}{2}(x-1, y-2)\, \mathrm{H}\, f(1,2) \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} = \\ &= -33 + \frac{1}{2}((x-1)(8(x-1) + 3(y-2)) + (y-2)(3(x-1) - 4(y-2))) + 8(x-1) - 22(y-2) \\ &= 4x^2 + 3xy - 6x - 2y^2 - 17y + 5 \end{aligned}$$

(5) Considere una función $f(x,y) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y dos funciones $x(u,v), y(u,v) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Considere la función compuesta $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$.

(a) (**2 puntos**) Enuncie la regla de la cadena para calcular

$$\frac{\partial h}{\partial u}, \quad \frac{\partial h}{\partial v}$$

Solución:

$$\frac{\partial h}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$
$$\frac{\partial h}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

(b) (**5 puntos**) Ulitice el apartado anterior para calcular

$$\frac{\partial h}{\partial u}, \quad \frac{\partial h}{\partial v}$$

para las funciones

$$f(x,y) = \frac{2x-y}{x+3y} \qquad \text{y} \qquad x(u,v) = -ue^{2u}, \quad y(u,v) = v^2e^{2u}$$

en el punto $(u_0, v_0) = (0, -1)$.

Solución:

$$x(0,-1) = 0, \quad y(0,-1) = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{7y}{(x+3y)^2} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \frac{7}{9}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-7x}{(x+3y)^2} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -e^{2u} - 2ue^{2u} \longrightarrow \frac{\partial x}{\partial u}(0,-1) = -1; \quad \frac{\partial x}{\partial v} = 0 \longrightarrow \frac{\partial x}{\partial v}(0,-1) = 0$$
$$\frac{\partial y}{\partial u} = 2v^2e^{2u} \longrightarrow \frac{\partial y}{\partial u}(0,-1) = 2; \quad \frac{\partial y}{\partial v} = 2ve^{2u} \longrightarrow \frac{\partial y}{\partial v}(0,-1) = -2$$

Luego,

$$\frac{\partial h}{\partial u}(0,-1) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{7}{9}\cdot(-1) + 0\cdot 2 = \frac{-7}{9}$$
$$\frac{\partial h}{\partial v}(0,-1) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{7}{9}\cdot 0 + 0\cdot(-2) = 0$$

.

(c) (**3 puntos**) Calcule la función composición $h(u,v)$, su vector gradiente $\nabla h(u,v)$ y compruebe que $\nabla h(0,-1)$ concuerda con los resultados obtenidos anteriormente.

Solución:

$$h(u,v)\frac{-2ue^{2u} - v^2e^{2u}}{-ue^{2u} + 3v^2e^{2u}} = \frac{2u+v^2}{u-3v^2}$$

$$\nabla h(u,v) = \left(\frac{\partial h}{\partial u}, \frac{\partial h}{\partial v}\right) = \left(\frac{2(u-3v^2) - (2u+v^2)}{(u-3v^2)^2}, \frac{2v(u-3v^2) + 6v(2u+v^2)}{(u-3v^2)^2}\right) = \left(\frac{-7v^2}{(u-3v^2)^2}, \frac{14uv}{(u-3v^2)^2}\right)$$

y obtenemos $\nabla h(0,-1) = \left(\frac{-7}{9}, 0\right)$ *que coincide con el resultado anterior.*