Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía

Examen final de Matemáticas para la Economía I. 21 de Enero de 2022.

(1) Considere el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 25, x + y \geq 5\}$.

(a) (**4 puntos**) Dibuje el conjunto A, su interior y su frontera. Justifique si el conjunto A es abierto, cerrado, acotado, compacto y/o convexo.

(b) (**3 puntos**) Enuncie el teorema de Weierstrass. Determine si es posible aplicar el teorema de Weierstrass a la función $f(x, y) = xy$ definida en A. Dibuje las curvas de nivel de $f(x, y) = xy$ definida en $\mathbb{R}^2_+$ y la dirección de crecimiento de las curvas de nivel.

(c) (**3 puntos**) Utilizando las anteriores curvas de nivel de f, determine si esta función alcanza un valor maximo y/o mínimo en el conjunto A. En caso afirmativo, calcule los puntos donde la función f alcanza los valores extremos en el conjunto A.

(2) Considere la función $f(x, y, z) = 4ax^2 + 4ay^2 + 5xy + 4xz + 2z^2$ definida en $\mathbb{R}^3$, con $a \in \mathbb{R}$.

(a) (**6 puntos**) Determine para qué valores de a la función es estrictamente convexa. Determine para qué valores de a la función es estrictamente cóncava.

(b) (**4 puntos**) Aplique los resultados anteriores para determinar si el conjunto $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + 5xy + 4xz + 4y^2 + 2z^2 \leq 5\}$ es convexo.

(3) Considere el conjunto de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcl} xy^2 - yz^2 + yz & = & 1 \\ xe^{2z} - y^2 z & = & 1 \end{array}\right\}$$

(a) (**4 puntos**) Demuestre que el anterior sistema de ecuaciones determina implícitamente dos funciones diferenciables $y(x)$ y $z(x)$ en un entorno del punto $(x, y, z) = (1, -1, 0)$.

(b) (**6 puntos**) Calcule

$$y'(1), z'(1)$$

y el polinomio de Taylor de orden uno de la función $y(x)$ en el punto $x_0 = 1$. Encuentre un valor aproximado de $y(0.95)$ utilizando dicho polinomio.

(4) Considere la función $f(x, y) = 2x^2y - xy + 2x - 2y^2 - 15y + 1$, el punto $p = (1, 2)$ y el vector $v = (-1, 3)$.

(a) (**5 puntos**) Calcule el gradiente y la matriz Hessiana de la función f en el punto p. Calcule $D_v f(p)$.

(b) (**5 puntos**) Calcule el plano tangente a la gráfica de la función f en el punto $(p, f(p))$. Calcule el polinomio de Taylor de segundo orden de la función f en el punto p.

(5) Considere una función $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y dos funciones $x(u, v), y(u, v) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Considere la función compuesta $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$.

(a) (**2 puntos**) Enuncie la regla de la cadena para calcular

$$\frac{\partial h}{\partial u}, \quad \frac{\partial h}{\partial v}$$

(b) (**5 puntos**) Ulitice el apartado anterior para calcular

$$\frac{\partial h}{\partial u}, \quad \frac{\partial h}{\partial v}$$

para las funciones

$$f(x, y) = \frac{2x - y}{x + 3y} \qquad \text{y} \qquad x(u, v) = -ue^{2u}, \quad y(u, v) = v^2 e^{2u}$$

en el punto $(u_0, v_0) = (0, -1)$.

(c) (**3 puntos**) Calcule la función composición $h(u, v)$, su vector gradiente $\nabla h(u, v)$ y compruebe que $\nabla h(0, -1)$ concuerda con los resultados obtenidos anteriormente.