Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía

Examen final de Matemáticas para la Economía I. 27 de Enero de 2021.

(1) Considere el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leq x - 1, x \leq 5\}$.

(a) (**1 punto**) Dibuje el conjunto A, su interior y su frontera. Justifique si el conjunto A es abierto, cerrado, acotado, compacto y/o convexo.

(b) (**1 punto**) Enuncie el teorema de Weierstrass. Determine si es posible aplicar el teorema de Weierstrass a la función $f(x, y) = 2y - x$ definida en A. Dibuje las curvas de nivel de $f(x, y) = 2y - x$ y la dirección de crecimiento de las curvas de nivel.

(c) (**1 punto**) Utilizando las anteriores curvas de nivel de f, determine si esta función alcanza un valor maximo y/o mínimo en el conjunto A. En caso afirmativo, calcule los puntos donde la función f alcanza los valores extremos en el conjunto A.

(2) Considere la función $f(x, y) = cxy + x^2y + 2x + y^2 - 15y + 1$ definida en $\mathbb{R}^2$, con $c \in \mathbb{R}$.

(a) (**1 punto**) Calcule el gradiente de f y la matriz Hessiana de f. ¿Cuál es es el mayor subconjunto abierto D de $\mathbb{R}^2$ en el cual la función f es estrictamente convexa? (El conjunto D depende de c.)

(b) (**1 punto**) ¿Para qué valores de c es el conjunto D calculado en el apartado (b) convexo?

(3) Considere la ecuación

$$yz - x^2z^3 = 1$$

(a) (**0.5 puntos**) Utilizando el teorema de la función implicíta, demuestre que la ecuación define una función $z = h(x, y)$ cerca del punto $x = 1$, $y = 2$, $z = 1$.

(b) (**1 punto**) Calcule

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1, 2), \quad \frac{\partial z}{\partial y}(1, 2),$$

(c) (**0.5 puntos**) Escriba la ecuación del plano tangente a la gráfica de la función $z = h(x, y)$, determinada en el apartado (a), en el punto $q = (1, 2)$.

(4) Considere la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) (**1 punto**) Escriba las definiciones de $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$. Calcule

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$$

(b) (**1 punto**) Escriba la definición de que la función $f(x, y)$ es diferenciable en el punto $(0, 0)$. Demuestre que la función $f(x, y)$ es diferenciable en el punto $(0, 0)$.

(5) (**1 punto**) Sea $f(x, y, z) = xy + z^2$, $g(u, v) = (u + v, u - 2v, 2u + v)$ y $h(u, v) = f(g(u, v))$. Utilizando la regla de la cadena calcule

$$\frac{\partial h}{\partial u}, \quad \frac{\partial h}{\partial v}$$