Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía

Examen final de Matemáticas para la Economía I. 9 de Enero de 2019.

(1) Considere el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, 2y + x \leq 2\}$ y la función $f(x, y) = x - y^2$.

(a) (**0.5 puntos**) Dibuje el conjunto A, su interior y frontera. Justifique si es abierto, cerrado, acotado, compacto o convexo.

(b) (**0.5 puntos**) Enuncie el Teorema de Weierstrass. Determine si es posible aplicar el Teorema de Weierstrass a la función f definida en A.

(c) (**1 punto**) Utilizando las curvas de nivel, determine si la función $f(x, y)$ del apartado anterior alcanza máximo o mínimo en el conjunto A. En caso afirmativo, calcule los puntos donde se alcanzan los valores extremos y los valores máximo y/o mínimo de f en el conjunto A.

(2) Considere la función $f(x, y, z) = ax^2 + ay^2 + cz^2 + 2abxy$ en $\mathbb{R}^2$, con $a < 0$, $c \neq 0$.

(a) (**1 punto**) Discutir, según los valores de los parámetros a, b y c, cuándo f es estrictamente cóncava o es estrictamente convexa en $\mathbb{R}^2$.

(b) (**1 punto**) Utilizando los resultados anteriores, determine si el conjunto $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4 - x^2 - xy - y^2 - z^2 \geq 0\}$ es convexo.

(3) Considere la ecuación

$$ye^{xz} + y^2 z = 3$$

(a) (**0.5 puntos**) Utilizando el teorema de la función implícita demuestre que la ecuación anterior define una función z en un entorno del punto $x = 0$, $y = 1$, $z = 2$.

(b) (**1 punto**) Calcule

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0, 1), \quad \frac{\partial z}{\partial y}(0, 1),$$

(c) (**0.5 puntos**) Escriba la ecuación del plano tangente a la gráfica de la función $z(x, y)$, calculada en el apartado (a), en el punto $q = (0, 1)$.

(4) Considere una función $f(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y tres funciones $x(u, v), y(u, v), z(u, v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Considere la función compuesta $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $h(u, v) = f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$.

(a) (**1 punto**) Enuncie la regla de la cadena para calcular

$$\frac{\partial h}{\partial u}, \quad \frac{\partial h}{\partial v}$$

(b) (**1 punto**) Utilice el apartado anterior para calcular

$$\frac{\partial h}{\partial u}, \quad \frac{\partial h}{\partial v}$$

para las funciones

$$f(x, y, z) = x^2 - y^2 + xz$$

y

$$x(u, v) = 2u + v, \quad y(u, v) = u - 2v, \quad z(u, v) = uv$$

(5) Sea $f(x, y, z) = x \ln(yz) - x^2 - y^2 - z^2$, $v = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

(a) (**1 punto**) Halle el gradiente de f en el punto $p = (0, 1, 1)$. Determine para qué valores de a, b, c se verifica que $D_v f(p) = 0$.

(b) (**1 punto**) Escriba el polinomio de Taylor de orden 2 de la función $f(x, y, z)$ en un entorno del punto $p = (0, 1, 1)$.