Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía

Examen final de Matemáticas I. 19 de enero de 2024.

Apellidos:		**Nombre:**
DNI:	**Titulación:**	**Grupo:**

IMPORTANTE

- **DURACIÓN DEL EXAMEN: 2h**
- **NO** se permite el uso de calculadoras.
- **Sólo se entregará este cuadernillo.** Las respuestas deben escribirse en este cuadernillo ya que sólo se puntuará lo que haya en él. Por favor, compruebe que hay 10 páginas en el cuadernillo.
- **NO DESGRAPE LAS HOJAS DEL EXAMEN.**
- Es imprescindible identificarse ante el profesor.
- Hay espacio adicional para operaciones al final del examen y detrás de esta página.

Problema	Puntuación
1	
2	
3	
4	
5	
6	
Total	

Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía

Examen final de Matemáticas para la Economía I. 19 de enero de 2024.

---

(1) Considere el conjunto
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + x \leq 0 \leq x + 5\}$$
y la función
$$f(x,y) = (4y + x)^5$$
(a) **(10 puntos)** Dibuje el conjunto A, su interior y su frontera. Justifique si el conjunto A es abierto, cerrado, acotado, compacto y/o convexo.
(b) **(5 puntos)** Enuncie el teorema de Weierstrass. Determine si es posible aplicar el teorema de Weierstrass a la función f definida en A.
(c) **(5 puntos)** Dibuje las curvas de nivel de f, indicando la dirección de crecimiento de la función.
(d) **(10 puntos)** Utilizando las anteriores curvas de nivel de f, determine (si existe) el **mínimo y/o máximo globales** de f en el conjunto A.

(2) Considere la función $f(x,y,z) = 2ax^2 + 4axy + 3ay^2 + byz + cz^2 + 13x - 20y + z$ definida en $\mathbb{R}^3$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$, y $a \neq 0$.
(a) **(8 puntos)** Determine para qué valores de a, b, c la función es estrictamente convexa. Determine para qué valores de a, b, c la función es estrictamente cóncava.

(b) **(2 puntos)** Aplique los resultados anteriores para determinar si el conjunto $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -2x^2 - 4xy + 13x - 3y^2 + yz - 20y - z^2 + z \geq 10\}$ es convexo.

(3) Considere el sistema de ecuaciones
$$\begin{aligned} 2xy + z^2 &= 1 \\ x + y^2 + z &= 0 \end{aligned}$$
(a) **(5 puntos)** Demuestre que el anterior sistema de ecuaciones determina implícitamente dos funciones diferenciable $y(x)$ y $z(x)$ en un entorno del punto $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, -1)$.

(b) **(10 puntos)** Calcule
$$y'(1), z'(1)$$
(c) **(5 puntos)** Calcule el polinomio de Taylor de orden uno de las funciones $y(x)$ y $z(x)$ en el punto $x_0 = 1$.
(d) **(5 puntos)** Calcule el polinomio de Taylor de orden dos de las funciones $y(x)$ y $z(x)$ en el punto $x_0 = 1$.

(4) Considere la función
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{if } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{if } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
(a) **(5 puntos)** Determine si la función f es continua en el punto $(0,0)$

(b) **(5 puntos)** Calcule $\nabla f(0,0)$.

(c) **(5 puntos)** Determine si la función f es diferenciable en el punto $(0,0)$

(5) **(10 puntos)** Considere la función $f(u,v) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y las funciones $u(x,y,z), v(x,y,z) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por
$$f(u,v) = u^2 + uv \qquad \text{y} \qquad u(x,y,z) = e^x + y^2 + z, \quad v(x,y,z) = x^2 + e^{y^2} + \ln(z)$$

Y considere la composición $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x,y,z) = f(u(x,y,z), v(x,y,z))$. Usando la regla de la cadena calcule

$$\frac{\partial h}{\partial x}(0,0,1), \quad \frac{\partial h}{\partial y}(0,0,1), \quad \frac{\partial h}{\partial z}(0,0,1)$$

(6) Considere la supeficie determinada por la ecuación

$$x^2y - 5xyz + 2yz = 16$$

(a) **(5 puntos)** Escriba la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto $p = (-1,2,1)$.

(b) **(5 puntos)** Escriba las ecuaciones paramétricas de la recta normal a la superficie en el punto $p = (-1,2,1)$.