Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía

Examen final de Matemáticas I. 20 de enero de 2023.

Apellidos:		**Nombre:**
DNI:	**Titulación:**	**Grupo:**

IMPORTANTE

- **DURACIÓN DEL EXAMEN: 2h**
- **NO** se permite el uso de calculadoras.
- **Sólo se entregará este cuadernillo.** Las respuestas deben escribirse en este cuadernillo ya que sólo se puntuará lo que haya en él. Por favor, compruebe que hay 10 páginas en el cuadernillo.
- **NO DESGRAPE LAS HOJAS DEL EXAMEN.**
- Es imprescindible identificarse ante el profesor.
- Hay espacio adicional para operaciones al final del examen y detrás de esta página.

Problema	Puntuación
1	
2	
3	
4	
5	
6	
Total	

Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía

Examen final de Matemáticas para la Economía I. 20 de enero de 2023.

---

(1) Considere el conjunto
$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 4 \le y \le 4 - x^2\}$$
y la función
$$f(x, y) = (2x - y)^3$$
(a) **(10 puntos)** Dibuje el conjunto A, su interior y su frontera. Justifique si el conjunto A es abierto, cerrado, acotado, compacto y/o convexo.
(b) **(5 puntos)** Enuncie el teorema de Weierstrass. Determine si es posible aplicar el teorema de Weierstrass a la función $f(x, y) = (2x - y)^3$ definida en A.
(c) **(5 puntos)** Dibuje las curvas de nivel de f y la dirección de crecimiento de la función.
(d) **(10 puntos)** Utilizando las anteriores curvas de nivel de f, determine (si existe) el **mínimo global** de f en el conjunto A.

(2) Considere la función $f(x, y, z) = 2abyz + ax^2 + 2axy + 2ay^2 + cz^2 + 3x + y + 15z - 73$ definida en $\mathbb{R}^3$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$, $abc \neq 0$.
(a) **(8 puntos)** Determine para qué valores de a, b, c la función es estrictamente convexa. Determine para qué valores de a, b, c la función es estrictamente cóncava.

(b) **(2 puntos)** Aplique los resultados anteriores para determinar si el conjunto $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x^2 - 2xy + 3x - 2y^2 - 4yz + y - 5z^2 + 15z \ge 0\}$ es convexo.

(3) Considere el sistema de ecuaciones
$$\begin{aligned} 2xy + xz^2 &= 1 \\ xy^2 + z &= -1 \end{aligned}$$
(a) **(5 puntos)** Demuestre que el anterior sistema de ecuaciones determina implícitamente una función diferenciable $z(x, y)$ en un entorno del punto $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, -1)$.
(b) **(10 puntos)** Calcule
$$y'(1), z'(1)$$

(c) **(5 puntos)** Calcule el polinomio de Taylor de orden uno de las funciones $y(x)$ y $z(x)$ en el punto $x_0 = 1$.

(4) Considere la función $f(x, y) = -ay + xy^3 - 2xy + 4x - y^2 + 1$, el punto $p = (-1, 1)$ y el vector $v = (5, 3)$, donde $a \in \mathbb{R}$.

(a) **(5 puntos)** Calcule el gradiente y la matriz Hessiana de la función f en el punto p. Calcule el vector $u = (u_0, u_1)$ con $u_0^2 + u_1^2 = 1$ tal que $D_u f(p)$ alcanza el valor máximo. Calcule el vector $w = (w_0, w_1)$ con $w_0^2 + w_1^2 = 1$ tal que $D_w f(p)$ alcanza el valor mínimo.

(b) **(5 puntos)** Calcule $D_v f(p)$. Calcule el valor a sabiendo que v es perpendicular a la curva de nivel de f que pasa por el punto p. Es decir, v es perpendicular a la curva $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = f(p)\}$.

(c) **(5 puntos)** Suponiendo que $a = 2$, calcule el plano tangente a la gráfica de la función f en el punto $(p, f(p))$.

(d) **(5 puntos)** Suponiendo que $a = 2$, calcule la matriz hessiana matrix de la función f en el punto p. Calcule el polinomio de Taylor de segundo orden de la función f en el punto p.

(5) **(10 puntos)** Considere la función $f(x,y) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ y las funciones $x(u,v), y(u,v), z(u,v) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x,y,z) = x^2y + xz \qquad \text{y} \qquad x(u,v) = e^u, \quad y(u,v) = uv, \quad z(u,v) = \ln v$$

y considere la composición $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(u,v) = f(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$. Usando la regla de la cadena calcule

$$\frac{\partial h}{\partial u}(0,1), \quad \frac{\partial h}{\partial v}(0,1)$$

(6) Considere la supeficie determinada por la ecuación

$$3x^2 + 2y^2 + 5z^2 = 56$$

(a) **(5 puntos)** Escriba la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto $p = (-1, 2, -3)$.

(b) **(5 puntos)** Escriba las ecuaciones paramétricas de la recta normal a la superficie en el punto $p = (-1, 2, -3)$.