Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía

Examen final de Matemáticas para la Economía I. 14 de Enero de 2020.

---

(1) Considere el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, xy > 0\}$ y la función $f(x, y) = xy$.

(a) (**0.5 puntos**) Dibuje el conjunto A, su interior y frontera. Justifique si es abierto, cerrado, acotado, compacto o convexo.

(b) (**0.5 puntos**) Enuncie el Teorema de Weierstrass. Determine si es posible aplicar el Teorema de Weierstrass a la función $f(x, y) = xy$ definida en A. Dibuje las curvas de nivel de la función $f(x, y) = xy$, indicando la dirección de crecimiento.

(c) (**1 punto**) Utilizando las curvas de nivel, determine si la función $f(x, y)$ del apartado anterior alcanza máximo y/o mínimo en el conjunto A. En caso afirmativo, calcule los puntos donde se alcanzan los valores extremos y los valores máximo y/o mínimo de f en el conjunto A.

---

(2) Considere la función $f(x, y) = ax^2 + by^2 + 2xy + x + y + 1$ en con $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) (**1 punto**) Discutir, según los valores de los parámetros a y b, cuándo f es estrictamente cóncava o es estrictamente convexa en $\mathbb{R}^2$.

(b) (**1 punto**) Utilizando los resultados anteriores, determine si el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -x^2 - 4y^2 + 2xy + x + y \geq 6\}$ es convexo.

---

(3) Considere la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + 2z = 1$$

(a) (**0.5 puntos**) Utilizando el teorema de la función implícita demuestre que la ecuación anterior define una función $z = h(x, y)$ en un entorno del punto $x = 0$, $y = -1$, $z = 0$.

(b) (**1 punto**) Calcule

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0, -1), \quad \frac{\partial z}{\partial y}(0, -1), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0, -1).$$

(c) (**0.5 puntos**) Escriba la ecuación del plano tangente a la gráfica de la función $z = h(x, y)$, calculada en el apartado (a), en el punto $q = (0, -1)$.

---

(4) Considere una función $f(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y tres funciones $x(s, t), y(s, t), z(s, t) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Considere la función compuesta $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $h(s, t) = f\left(x(s, t), y(s, t), z(s, t)\right)$.

(a) (**1 punto**) Enuncie la regla de la cadena para calcular

$$\frac{\partial h}{\partial s}, \quad \frac{\partial h}{\partial t}$$

(b) (**1 punto**) Utilice el apartado anterior para calcular

$$\frac{\partial h}{\partial s}, \quad \frac{\partial h}{\partial t}$$

para las funciones

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2}\left(\ln^2(x) + \ln^2(y) + \ln^2(z)\right)$$

y

$$x(s, t) = e^{(s+t)}, \ y(s, t) = e^{(s-t)}, \ z(s, t) = e^{st}$$

---

(5) Sea $g(x, y) = e^{ax-by}$, $v = (1, -1) \in \mathbb{R}^2$.

(a) (**1 punto**) Halle el gradiente de g en el punto $p = (0, 0)$. Determine para qué valores de a, b se verifica que $D_v g(p) = 0$.

(b) (**1 punto**) Escriba el polinomio de Taylor de orden 2 de la función $f(x,y) = e^{3x-2y}$ en un entorno del punto $p = (0,0)$.