Universidad Carlos III de Madrid

Departamento de Economía

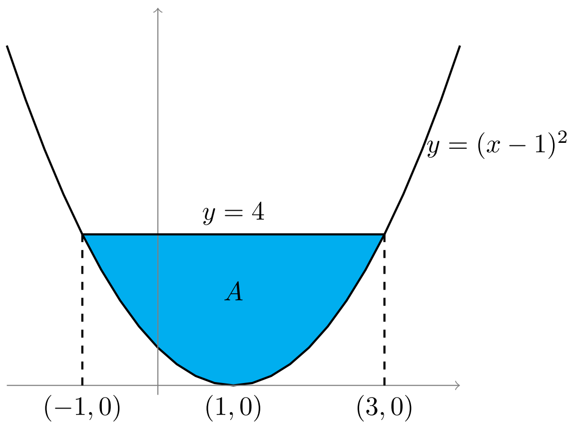
Examen final de Matemáticas para la Economía I. 25 de junio de 2019.

---

(1) Considere el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 \leq y \leq 4\}$ y la función $f(x, y) = y - x$.

(a) $\boxed{\textbf{0.5 puntos}}$ Dibuje el conjunto A, su interior y frontera. Justifique si el conjunto A es abierto, cerrado, acotado, compacto y/o convexo.

Solución: *El conjunto A es*



Su interior y su frontera son,

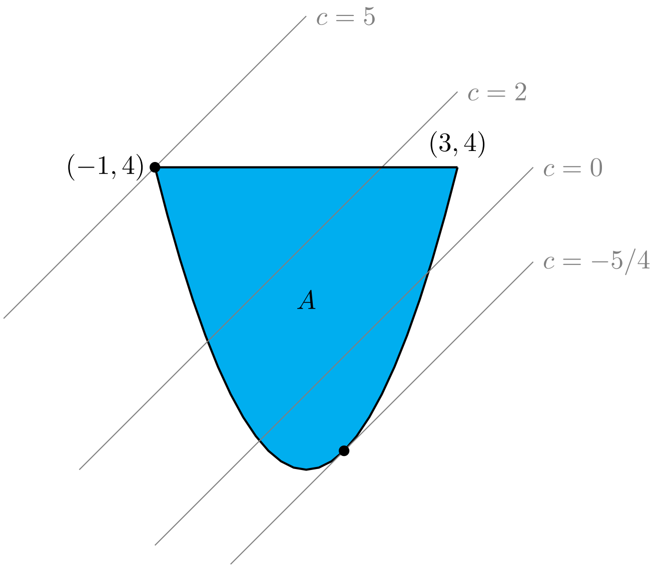
Como el conjunto A contiene su frontera es cerrado. Y como no coincide con su interior, no es abierto. Gráficamente, observamos que el conjunto A es convexa y acotado. Como es cerrado y acotado, el conjunto A es compacto.

(b) $\boxed{\textbf{0.5 puntos}}$ Enuncie el teorema de Weierstrass. Determine si es posible aplicar el teorema de Weierstrass a la función f definida en A.

Solución: *La función $f(x, y) = y - x$ es continua en todo $\mathbb{R}^2$. Y, por lo tanto, es continua en $A \subset \mathbb{R}^2$. Como el conjunto A es compacto, se verifican las hipótesis del teorema de Weierstrass. La función f alcanza un máximo y un mínimo globales en el conjunto A.*

(c) $\boxed{\textbf{0.5 puntos}}$ Utilizando las curvas de nivel de función anterior f, determine si esta función alcanza un máximo y/o un mínimo en el conjunto A. En ese caso, calcule los puntos donde se alcanzan los valores extremos de f en el conjunto conjunto A.

Solución: *Las curvas de nivel de f son lineas rectas $y = x + c$.*



Vemos que el valor máximo de f se alcanza en el punto $(-1,4)$. El valor máximo de f en A es $f(-1,4) = 5$.

El valor mínimo de f se alcanza en el punto de tangencia, digamos (x_0, y_0) de la recta $y = x + c$ con la gráfica de $g(x) = (x-1)^2$. Como la pendiente de la recta $y = x + c$ es $m = 1$ se verifica que $1 = g'(x_0) = 2(x_0 - 1)$. De aquí, obtenemos que $x_0 = \frac{3}{2}$. Y por la tanto, $y_0 = (x_0 - 1)^2 = \frac{1}{4}$. El valor mínimo de f en A es

$$f\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} = -\frac{5}{4}$$

(2) Considere la función $f(x,y,z) = ax^2 + by^2 - cz^2 + dxz$ donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ son parámetros.

(a) $\boxed{\textbf{0.6 punto}}$ Discuta, según los valores de los parámetros a, b, c, d, si la función f es estrictamente cóncava o estrictamente convexa en $\mathbb{R}^2$.

Solución: *La matrix Hessiana de f es*

$$\mathrm{H}(f)(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2a & 0 & d \\ 0 & 2b & 0 \\ d & 0 & -2c \end{pmatrix}$$

Los menores principales son

$$\begin{aligned} D_1 &= 2a \\ D_2 &= 4ab \\ D_3 &= -2b\left(4ac + d^2\right) \end{aligned}$$

- *Si*
$$a < 0, \quad b < 0, \quad d^2 < -4ac$$
entonces $D_1 < 0, D_2 > 0, D_3 < 0$ y la función f es estrictamente cóncava. En este caso, tenemos que $c > 0$.
- *Si*
$$a > 0, \quad b > 0, \quad d^2 < -4ac$$
entonces la función f es estrictamente convexa, ya que $D_1 > 0, D_2 > 0, D_3 > 0$. En este caso, tenemos que $c < 0$.

(b) $\boxed{\textbf{0.4 punto}}$ Utilizando el resultado anterior, determine si el conjunto $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -x^2 - y^2 + xz - z^2 \geq -1\}$ es convexo.

Solución: *Consideremos la función $g(z,y,x) = -x^2 - y^2 + xz - z^2$. Esta función se obtiene de la función $f(x,y,z) = ax^2 + by^2 - cz^2 + dxz$ tomando $a = b = -1$, $d = -3$, $c = 1$. Por el apartado anterior, la función g es estrictamente cóncava. Como $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(z,y,x) \geq -1\}$, el* *conjunto A es convexo.*

(3) Considere la ecuación

$$x^2z^3 + yz^4 = 1$$

(a) $\boxed{\textbf{0.2 puntos}}$ Utilizando el teorema de la función implícita demuestre que la ecuación anterior define una función $z(x, y)$ cerca del punto $x = 0,\ y = 1,\ z = -1$.

Solución: *Consideremos la función $f(x, y, z) = x^2z^3 + yz^4$. Vemos que $f(0, 1, -1) = 1$. Además,*

$$\frac{\partial f}{\partial z}(0, 1, -1) = \left(3x^2z^2 + 4yz^3\right)\Big|_{x=0,y=1,z=-1} = -4 \neq 0$$

Por el teorema de la función implícita, la ecuación $f(x, y, z) = 1$ define una función $z(x, y)$ en un entorno del punto $(0, 1)$.

(b) $\boxed{\textbf{0.6 puntos}}$ Calcule

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0, 1), \quad \frac{\partial z}{\partial y}(0, 1),$$

Solución: *Derivando implícitamente la ecuación $f(x, y, z) = 1$ tenemos que*

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f}{\partial x} = 2xz^3 + 3x^2z^2\frac{\partial z}{\partial x} + 4yz^3\frac{\partial z}{\partial x} \\ 0 &= 3x^2z^2\frac{\partial z}{\partial y} + z^4 + 4yz^3\frac{\partial z}{\partial y} \end{aligned}$$

valida para (x, y) en un entorno del punto $(0, 1)$. Sustituyendo $x = 0, y = 1, z = -1$ tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= -4\frac{\partial z}{\partial x}(0, 1) \\ 0 &= 1 - 4\frac{\partial z}{\partial y}(0, 1) \end{aligned}$$

Y obtenemos

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0, 1) = 0 \quad \frac{\partial z}{\partial y}(0, 1) = \frac{1}{4}$$

(c) $\boxed{\textbf{0.2 puntos}}$ Escriba la ecuación del plano tangente a la gráfica de la función $z(x, y)$, calculada en la parte (a), en el punto $q = (0, 1)$.

Solución: *La ecuación del plano tangente a la gráfica de la función $z(x, y)$ en el punto $q = (0, 1)$ es*

$$z = z(0, 1) + \frac{\partial z}{\partial x}(0, 1)(x - 0) + \frac{\partial z}{\partial y}(0, 1)(y - 1) = -1 + \frac{1}{4}(y - 1) = \frac{y}{4} - \frac{5}{4}$$

(4) Considere una función $f(u, v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ y dos funciones $u(x, y, z), v(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Considere la función compuesta $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $h(x, y, z) = f(u(x, y, z), v(x, y, z))$.

(a) $\boxed{\textbf{0.3 puntos}}$ Enuncie la regla de la cadena para las derivadas siguientes.

$$\frac{\partial h}{\partial x}, \quad \frac{\partial h}{\partial y}, \quad \frac{\partial h}{\partial z}$$

Solución:

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} \end{aligned}$$

(b) $\boxed{\textbf{0.7 puntos}}$ Utilizando el apartado (a) calcule

$$\frac{\partial h}{\partial x}, \quad \frac{\partial h}{\partial y}, \quad \frac{\partial h}{\partial z}$$

para las funciones

$$f(u,v) = uv^2$$

y

$$u(x,y,z) = x + yz, \quad v(x,y,z) = yz - x$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial x} &= v^2 + 2uv \times (-1) = 3x^2 - 2xyz - y^2z^2 \\
\frac{\partial h}{\partial y} &= v^2 z + 2uvz = -x^2z - 2xyz^2 + 3y^2z^3 \\
\frac{\partial h}{\partial z} &= v^2 y + 2uvy = -x^2y - 2xy^2z + 3y^3z^2
\end{aligned}$$

(5) Sea $f(x,y,z) = ye^{xz} - x^2 - yz^2$, $v = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$.

(a) $\boxed{\textbf{0.5 puntos}}$ Calcule el gradiente de f en el punto $p = (0,1,1)$. Determine para qué valores de a, b, c se verifica que $D_v f(p) = 0$.

Solución: *Tenemos que el gradiente de f*

$$\nabla f(x,y,z) = (yze^{xz} - 2x, e^{xz} - z^2, xye^{xz} - 2yz)$$

En el punto $p = (0,1,1)$ tenemos

$$\nabla f(0,1,1) = (1, 0, -2)$$

Por lo tanto,

$$D_v f(p) = \nabla(p) \cdot v = (1,0,-2) \cdot (a,b,c) = a - 2c$$

Por lo tanto, $D_v f(p) = 0$ si y sólo si $a = 2c$ con $b, c \in \mathbb{R}$ arbitrarios.

(b) $\boxed{\textbf{1 punto}}$ Escriba el polinomio de Taylor de orden 2 de la función $f(x,y,z)$ en el punto $p = (0,1,1)$.

Solución: *La matriz Hessiana de f es*

$$\mathrm{H}(f)(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^{xz}yz^2 - 2 & e^{xz}z & e^{xz}y + e^{xz}xzy \\ e^{xz}z & 0 & e^{xz}x - 2z \\ e^{xz}y + e^{xz}xzy & e^{xz}x - 2z & e^{xz}x^2y - 2y \end{pmatrix}$$

en el punto $p = (0,1,1)$,

$$\mathrm{H}(f)(0,1,1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Observamos que $f(0,1,1) = 0$. El polinomio de Taylor es

$$\begin{aligned}
P_2(x,y,z) &= (1,0,-2) \cdot (x, y-1, z-1) + \frac{1}{2}\left(-x^2 + 2x(y-1) + 2x(z-1) - 4(y-1)(z-1) - 2z^2\right) \\
&= -\frac{x^2}{2} + xy + xz - x - 2yz + 2y - z^2 + 2z - 1
\end{aligned}$$