**Departamento de Economía**

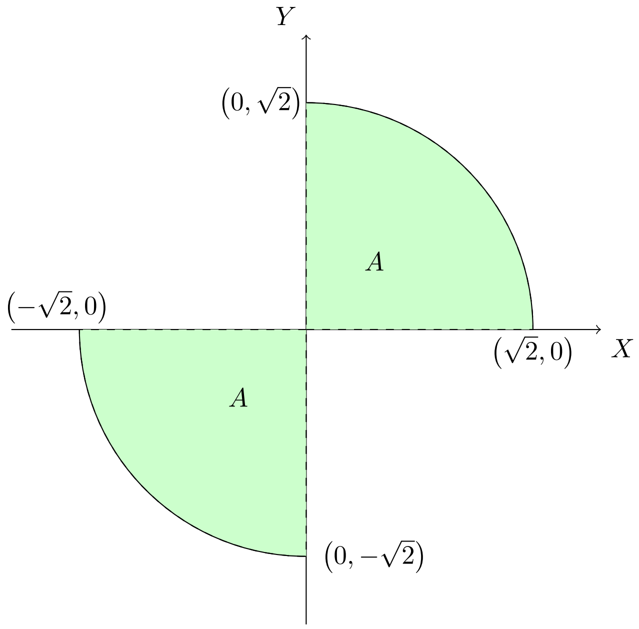
**Examen final de Matemáticas para la Economía I. 14 de Enero de 2020.**

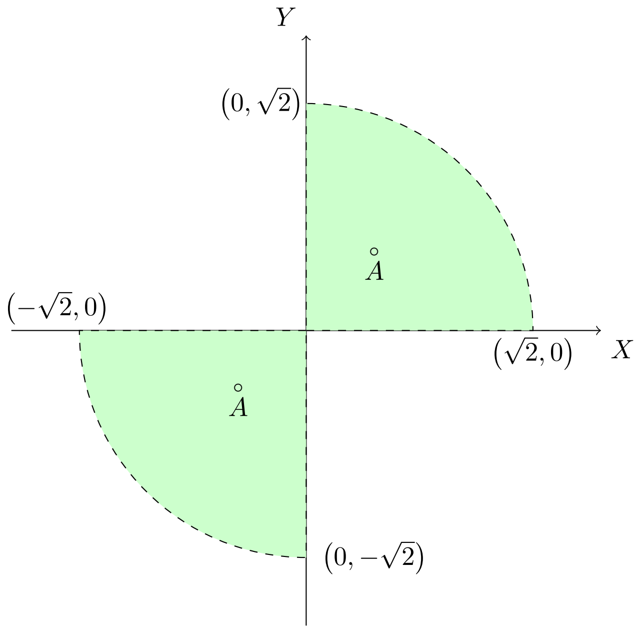
---

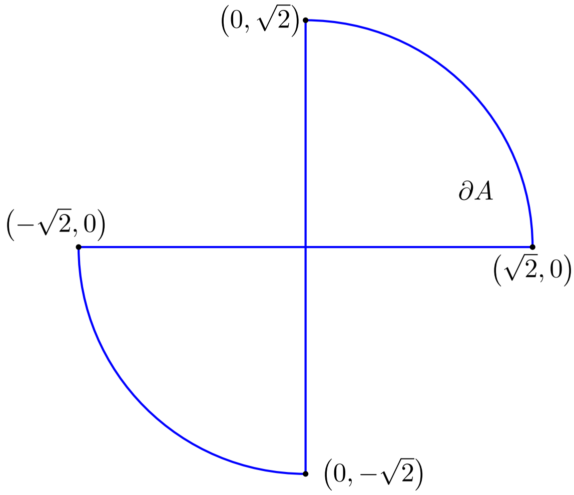
(1) Considere el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2, xy > 0\}$ y la función $f(x, y) = xy$.

(a) Dibuje el conjunto $A$, su interior y frontera. Justifique si es abierto, cerrado, acotado, compacto o convexo.

**Solución:** *El conjunto A su interior y su frontera son:*



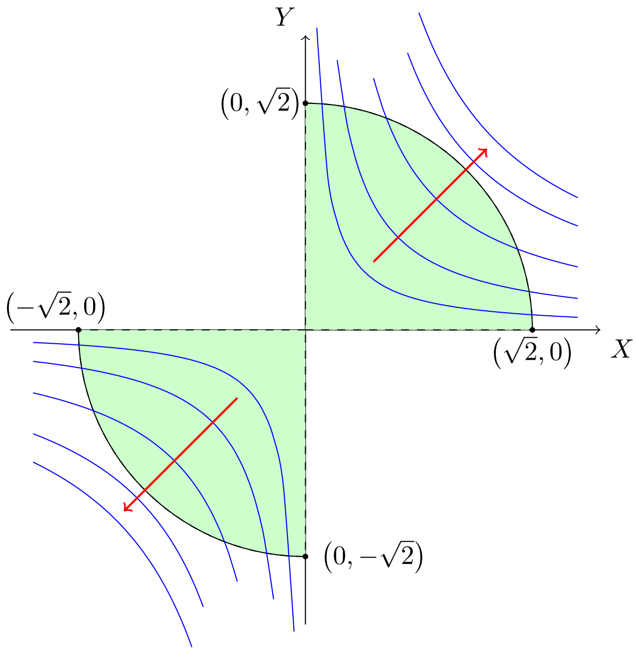



*Como el conjunto no $A$ contiene su frontera, no es cerrado. Y como no coincide con su interior, no es abierto. Gráficamente, observamos que el conjunto $A$ es acotado, pero no es convexo. El conjunto $A$ no es compacto.*

(b) Enuncie el Teorema de Weierstrass. Determine si es posible aplicar el Teorema de Weierstrass a la función $f$ definida en $A$. Dibuje las curvas de nivel de la función $f(x,y) = xy$, indicando la dirección de crecimiento.

**Solución:** *La función $f(x,y) = xy$ es continua en todo $\mathbb{R}^2$. Y, por lo tanto, es continua en $A \subset \mathbb{R}^2$. Pero, como el conjunto $A$ no es compacto, no se verifican las hipótesis del teorema de Weierstrass.*

*Las curvas de nivel de la función $f$ están dadas por la ecuación $y = \frac{C}{x}$, $\quad C \in \mathbb{R}$. Gráficamente,*




*Las flechas indican la dirección de crecimiento.*

(c) Utilizando las curvas de nivel, determine si la función $f(x,y)$ del apartado anterior alcanza máximo o mínimo en el conjunto $A$. En caso afirmativo, calcule los puntos donde se alcanzan los valores extremos y los valores máximo y/o mínimo de $f$ en el conjunto $A$.

**Solución:**

*Vemos que el valor máximo de $f$ se alcanza en los puntos donde las curvas de nivel de la función $f$ son tangentes a la frontera del conjunto $A$. Es decir, cuando la las curvas*

$$xy = C, \quad x^2 + y^2 = 2$$

*se intersectan en un único punto. Sustituyendo $y = \frac{C}{x}$ en la segunda ecuación, obtenemos*

$$x^2 + \frac{C^2}{x^2} = 2$$

*es decir,*

$$x^4 - 2x^2 + C^2 = 0$$

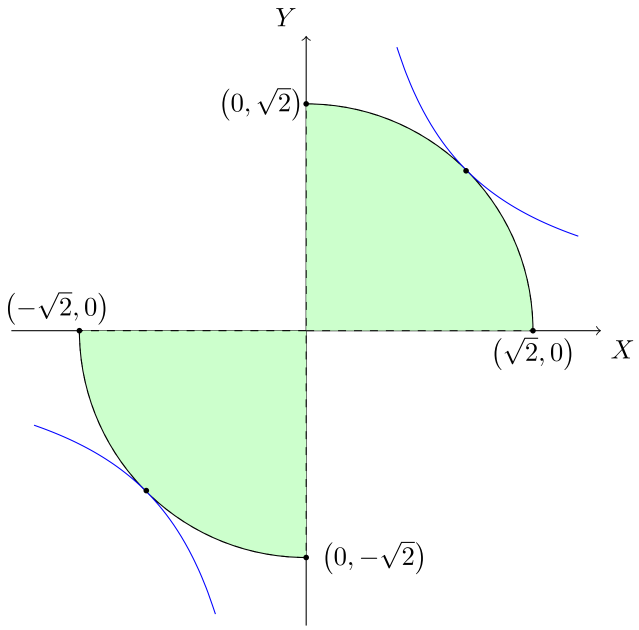
*Se trata de una ecuación bicuadrada. Haciendo el cambio $t = x^2$, se reduce a*

$$t^2 - 2t + C^2 = 0$$

*Las soluciones son*

$$\frac{2 \pm \sqrt{4 - 4C^2}}{2}$$

*Para que haya una única solución debe verificarse que $4 - 4C^2 = 0$, es decir, $C^2 = 1$. Obtenemos la ecuación $t^2 - 2t + 1 = 0$ cuya única solución es $t = 1$. Obtenemos $x^2 = 1$ y de la ecuación $x^2 + y^2 = 2$ deducimos que $y^2 = 1$. Gráficamente, vemos que $x$ e $y$ tienen el mismo signo. Las soluciones son $(1, 1)$ y $(-1, -1)$. El valor máximo alcanzado por la función es $f(1, 1) = f(-1, -1) = 1$. Gráficamente,*




*Tomando puntos de la forma*

$$x = y = \frac{1}{n}, \quad \text{con } n = 1, 2, \ldots$$

*vemos que*

- $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \in A$ *para todo* $n = 1, 2, \ldots$
- $\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}$.

*Pero no hay ningún punto $(x, y) \in A$ que verifique $f(xy) = xy = 0$, porque si $(x, y) \in A$ entonces $x, y \neq 0$. Por lo tanto, la función $f$ no alcanza un mínimo en el conjunto $A$.*

(2) Considere la función $f(x, y) = ax^2 + by^2 + 2xy + x + y + 1$ en con $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Discutir, según los valores de los parámetros $a$ y $b$, cuándo $f$ es estrictamente cóncava o es estrictamente convexa en $\mathbb{R}^2$.

**Solución:**

*La matrix Hessiana de $h$ es*

$$\mathrm{H}(h)(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2a & 2 \\ 2 & 2b \end{pmatrix}$$

*Los menores principales son*

$$\begin{aligned} D_1 &= 2a \\ D_2 &= 4ab - 4 = 4(ab-1) \end{aligned}$$

- *Si $a > 0$ y $b > 1/a$, entonces la función $f$ es estrictamente convexa , ya que $D_1 > 0, D_2 > 0$.*
- *Si $a < 0$ y $b < 1/a$, entonces la función $f$ es cóncava, ya que $D_1 < 0, D_2 > 0$.*

(b) Utilizando los resultados anteriores, determine si el conjunto $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -x^2 - 4y^2 + 2xy + x + y \geq 6\}$ es convexo.

**Solución:** *Consideramos la función $g(x,y) = -x^2 - 4y^2 + 2xy + x + y + 1$. Esta función se obtiene de la función $f(x,y) = ax^2 + by^2 + 2xy + x + y + 1$ tomando $a = -1$, $b = -4$. Por el apartado anterior, la función $g$ es estrictamente cóncava. Como $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : g(x,y) \geq 7\}$, el conjunto $A$ es convexo.*

(3) Considere la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + 2z = 1$$

(a) Utilizando el teorema de la función implícita demuestre que la ecuación anterior define una función $z = h(x,y)$ en un entorno del punto $x = 0$, $y = -1$, $z = 0$.

**Solución:** *Consideramos la función $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + 2$. Vemos que $f(0,-1,0) = 1$. Además,*

$$\frac{\partial f}{\partial z}(0,-1,0) = (2z+2)|_{x=0,y=-1,z=0} = 2 \neq 0$$

*Por el teorema de la función implícita, la ecuación $f(x,y,z) = 1$ define una función $z = h(x,y)$ en un entorno del punto $(0,-1)$.*

(b) Calcule

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,-1), \quad \frac{\partial z}{\partial y}(0,-1), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0,-1),$$

**Solución:** *Derivando implícitamente la ecuación $f(x,y,z) = 1$ tenemos que*

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} + y + 2\frac{\partial z}{\partial x} \\ 0 &= \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 2z\frac{\partial z}{\partial y} + x + 2\frac{\partial z}{\partial y} \end{aligned}$$

*valida para $(x,y)$ en un entorno del punto $(0,-1)$. Sustituyendo $x = 0, y = -1, z = 0$ tenemos que*

$$\begin{aligned} 0 &= -1 + 2\frac{\partial z}{\partial x}(0,-1) \\ 0 &= -2 + 2\frac{\partial z}{\partial y}(0,-1) \end{aligned}$$

*Y obtenemos*

$$\frac{\partial z}{\partial x}(0,-1) = \frac{1}{2} \quad \frac{\partial z}{\partial y}(0,1) = 1$$

*Derivando, de nuevo, la ecuación*

$$2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} + y + 2\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

*respecto a $y$ obtenemos*

$$2\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} + 2z\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 1 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

*Sustituyendo*

$$x = 0, y = -1, z = 0, \frac{\partial z}{\partial x}(0,-1) = \frac{1}{2}, \frac{\partial z}{\partial y}(0,1) = 1$$

*tenemos que*

$$2\frac{1}{2} + 1 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0,-1) = 0$$

*Es decir,*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0,-1) = -1$$

(c) Escriba la ecuación del plano tangente a la gráfica de la función $z = h(x,y)$, calculada en el apartado (a), en el punto $q = (0,-1)$.

**Solución:** *La ecuación del plano tangente a la gráfica de la función* $z = h(x,y)$ *en el punto* $q = (0,-1)$ *es*

$$z = h(0,-1) + \frac{\partial h}{\partial x}(0,-1)(x-0) + \frac{\partial h}{\partial y}(0,-1)(y+1) = 0 + \frac{1}{2}x + y + 1 = \frac{1}{2}x + y + 1$$

(4) Considere una función $f(x,y,z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y tres funciones $x(s,t), y(s,t), z(s,t) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Considere la función compuesta $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $h(s,t) = f(x(s,t), y(s,t), z(s,t))$.

(a) Enuncie la regla de la cadena para calcular

$$\frac{\partial h}{\partial s}, \quad \frac{\partial h}{\partial t}$$

**Solución:**

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial s} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial h}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} \end{aligned}$$

(b) Utilice el apartado anterior para calcular

$$\frac{\partial h}{\partial s}, \quad \frac{\partial h}{\partial t}$$

para las funciones

$$f(x,y,z) = \frac{1}{2}\left(\ln^2(x) + \ln^2(y) + \ln^2(z)\right)$$

y

$$x(s,t) = e^{(s+t)}, \; y(s,t) = e^{(s-t)}, \; z(s,t) = e^{st}$$

**Solución:** *Aplicando la regla de la cadena*

$$\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

(c)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\ln(x)}{x} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\ln(y)}{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\ln(z)}{z}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial s} &= e^{(s+t)} = x & \qquad \frac{\partial x}{\partial t} &= e^{(s+t)} = x \\ \frac{\partial y}{\partial s} &= e^{(s-t)} = y & \qquad \frac{\partial y}{\partial t} &= -e^{(s-t)} = -y \\ \frac{\partial z}{\partial s} &= te^{st} = tz & \qquad \frac{\partial z}{\partial t} &= se^{st} = sz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} &= \frac{\ln(x)}{x}x = \ln(e^{s+t}) = s+t \\
\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} &= \frac{\ln(y)}{y}(y) = \ln(e^{s-t}) = s-t \\
\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} &= \frac{\ln(z)}{z}tz = \ln(e^{st})t = st^2 \\
\frac{\partial h}{\partial s} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} = s+t+s-t+st^2 \\
&\boxed{\frac{\partial h}{\partial s} = 2s + st^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} &= \frac{\ln(x)}{x}x = \ln(e^{s+t}) = s+t \\
\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} &= \frac{\ln(y)}{y}(-y) = -\ln(e^{s-t}) = -s+t \\
\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\ln(z)}{z}sz = \ln(e^{st})s = s^2t \\
\frac{\partial h}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = s+t-s+t+s^2t \\
&\boxed{\frac{\partial h}{\partial t} = 2t + s^2t}
\end{aligned}$$

(5) Sea $g(x,y) = e^{ax-by}$, $v = (1,-1) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Halle el gradiente de $g$ en el punto $p = (0,0)$. Determine para qué valores de $a, b$ se verifica que $D_v g(p) = 0$.

**Solución:** *Tenemos que*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) &= \left(ae^{ax-by}\right)\big|_{x=0,y=0} = a \\
\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) &= \left(-be^{ax-by}\right)\big|_{x=0,y=0} = -b
\end{aligned}$$

*Por lo tanto,*

$$D_v f(p) = \nabla(p)\cdot v = (a,-b)\cdot(1,-1) = a+b = 0$$

*Por lo tanto, $D_v f(p) = 0$ si y sólo si $a = -b$ con $b \in \mathbb{R}$.*

(b) Escriba el polinomio de Taylor de orden 2 de la función $f(x,y) = e^{3x-2y}$ en un entorno del punto $p = (0,0)$.

**Solución:** *El gradiente de $f$ es $\nabla f(x,y) = (3e^{3x-2y}, -2e^{3x-2y})$. Por lo tanto,*

$$\nabla f(0,0) = (3,-2)$$

*La matriz Hessiana de $f$ es*

$$\mathrm{H}(f)(x,y) = e^{3x-2y}\begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$$

*en el punto $p = (0,0)$,*

$$\mathrm{H}(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$$

*El polinomio de Taylor es*

$$\begin{aligned}
P_2(x,y) &= f(0,0) + \nabla f(0,0)\cdot(x,y) + \frac{1}{2}\cdot(x,y)\cdot Hf(0,0)\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= 1 + (3,-2)\cdot(x,y) + \frac{1}{2}\cdot(x,y)\cdot\begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\
&= 1 + 3x - 2y + \frac{9}{2}x^2 - 6xy + 2y^2
\end{aligned}$$